

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 15 marzo 1914.

F. D' OVIDIO Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sui sistemi tripli coniugati con una famiglia di superficie applicabili sopra quadriche.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

1. La teoria delle trasformazioni B_n per le superficie applicabili sulle quadriche generali, quale trovasi esposta nel terzo volume delle mie *Lezioni di geometria differenziale*, costituisce (come ormai può dirsi ben confermato dalle ricerche più recenti) la più naturale e completa estensione delle trasformazioni di Bäcklund per le superficie a curvatura costante, positiva o negativa. Ma nella teoria di queste ultime superficie (deformate della sfera reale od immaginaria) vi ha un altro interessante capitolo: quello che tratta delle *famiglie di Lamé* costituite di tali superficie, al quale fino ad ora non ne corrispondeva uno analogo per le deformate delle quadriche generali.

La questione che si presentava spontanea, cogli ultimi studi, era di ricercare se colle deformate delle quadriche generali si possano comporre delle famiglie di superficie, le quali, per le loro proprietà, siano da riguardarsi come la naturale estensione delle famiglie di Lamé di superficie a curvatura costante. Dopo alcuni tentativi diretti ad ottenere la generalizzazione richiesta, ho riconosciuto che essa deve opportunamente cercarsi nella teoria dei *sistemi tripli coniugati* di Darboux ⁽¹⁾, cioè di quei sistemi

⁽¹⁾ Ved. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, IV^{ème} part., nn. 1047-1052; e *Leçons sur les systèmes orthogonaux*, livre III, chap. III (2^{ème} ed., 1910).

tripli di superficie nei quali ciascuna superficie viene intersecata dalle superficie delle altre due famiglie secondo le linee di un sistema coniugato.

Si vede, invero, che colle deformate di qualunque quadrica si possono costruire, ed in grande arbitrarietà, famiglie di tali superficie applicabili sulla medesima quadrica, o, più in generale, su quadriche differenti, e che appartengono a sistemi tripli coniugati dotati di particolari proprietà, che sono la naturale estensione di quelle ben note per le famiglie di Lamé a curvatura costante. Precisiamo le accennate proprietà supponendo che nel sistema triplo coniugato

$$u = \text{cost} \quad , \quad v = \text{cost} \quad , \quad w = \text{cost} \quad ,$$

le superficie $w = \text{cost}$ siano quelle applicabili sopra quadriche; allora abbiamo:

1°) *La corrispondenza segnata su due qualunque superficie $w = \text{cost}$ dalle linee (w) , intersezioni delle altre due famiglie, conserva i sistemi coniugati.*

2°) *Il sistema coniugato (u, v) , intercettato sopra ciascuna $w = \text{cost}$ dalle superficie delle altre due famiglie, è quello coniugato permanente (cioè quello che si conserva coniugato applicando la $w = \text{cost}$ sulla corrispondente quadrica).*

Allorquando le quadriche Q , su cui sono applicabili le $w = \text{cost}$, si suppongono altrettante sfere (reali od immaginarie), il sistema coniugato permanente è quello *ortogonale* delle linee di curvatura, ed il sistema triplo coniugato diventa un sistema triplo ortogonale.

Rispetto alle trasformazioni B_k della teoria generale per le deformate delle quadriche, i sistemi tripli coniugati ora considerati si comportano precisamente come i sistemi tripli ortogonali di superficie a curvatura costante rispetto alle trasformazioni di Bäcklund, sussistendo la proprietà seguente:

Da ogni sistema triplo coniugato, con una famiglia di deformate di quadriche, le trasformazioni B_k fanno derivare infiniti altri sistemi della stessa specie, le cui singole superficie della nuova famiglia sono legate alle corrispondenti dell'antica da una trasformazione B_k . La trasformazione per l'intera famiglia è individuata quando si fissi, del resto ad arbitrio, per una singola superficie della famiglia.

Aggiungo, in fine, che anche per le trasformazioni B_k dei nostri sistemi tripli coniugati vale il *teorema di permutabilità*, dal quale risultano, per l'applicazione ripetuta del processo di trasformazione, le solite semplificazioni.

2. Non è mio proposito, nè sarebbe possibile in una breve Nota preliminare, entrare negli effettivi sviluppi relativi al caso generale. Soltanto dirò che la costruzione dei nuovi sistemi tripli coniugati si può ottenere dalla ripetizione continua di *trasformazioni infinitesimali*, seguendo i con-

cetti che ho avuto occasione di esporre in un recente lavoro (¹). La natura di queste trasformazioni infinitesime, che diremo T_ε , risulta dalle considerazioni seguenti:

Sopra una superficie S , applicabile sopra una quadrica Q , consideriamo il sistema coniugato permanente (u, v) . Ogni punto P di S riceva uno spostamento infinitesimo che lo porti in un punto corrispondente P' , per modo che:

1°) la superficie S' , luogo di P' , sia applicabile alla sua volta sulla stessa quadrica Q , ovvero sopra un'altra (infinitamente poco diversa);

2°) ad ogni sistema coniugato sopra S corrisponda un sistema coniugato sopra S' ;

3°) le sviluppabili della congruenza formata dalle congiungenti PP' i punti corrispondenti, taglino tanto S quanto S' nelle linee del sistema coniugato permanente.

Se queste condizioni sono soddisfatte, il passaggio da S ad S' si dirà una trasformazione infinitesima T_ε della S .

Ora si riconosce che, per qualunque superficie S , deformata di una quadrica, esistono infinite tali trasformazioni infinitesime dipendenti da costanti arbitrarie. Mediante una successione continua di trasformazioni infinitesime T_ε , vengono a generarsi i nostri sistemi tripli coniugati, precisamente come la costruzione infinitesimale di Weingarten per le superficie a curvatura costante, ripetuta in modo continuo, dà luogo ai sistemi tripli ortogonali con una famiglia di queste superficie.

Qui consideriamo una classe particolare di trasformazioni infinitesime T_ε , ma che esistono per qualunque superficie S deformata di una quadrica. Per ciò applichiamo alla S una trasformazione B_k singolare, corrispondente adunque ad una conica focale F , e sia S_1 una delle superficie trasformate. La medesima trasformazione singolare B_k , applicata alla S_1 , dà luogo ad una serie ∞^1 di trasformate, tra le quali vi ha la S stessa. Diciamo S' la superficie di questa serie successiva alla S ; il passaggio dalla S alla S' avviene appunto per una T_ε , giacchè tutte le condizioni sopra enumerate sono qui soddisfatte, colla ulteriore particolarità che S, S' sono applicabili sulla medesima quadrica. Ogni superficie S ammette ∞^1 di tali trasformazioni infinitesime T_ε , poichè, data la S , la S_1 resta arbitraria in una serie ∞^1 . Per le ∞^1 trasformazioni infinitesime T_ε ogni punto P di S riceve ∞^1 spostamenti, le cui direzioni formano un cono col vertice in P , che è facile di caratterizzare geometricamente. Per questo, basta ricorrere alla legge di affinità di Ivory e immaginare che la quadrica Q , rotolando sulla superficie applicabile S , venga a toccarla in P ; allora si vede che:

(¹) Ved. la prefazione alla Memoria: *Sulla teoria delle trasformazioni delle curve di Bertrand e delle superficie pseudosferiche*, Memorie della Società dei XL, serie 3ª, tomo 18 (1913).

Gli spostamenti impressi dalle ∞^1 trasformazioni infinitesime T , od un punto P della S , avvengono secondo le generatrici del cono quadratico che proietta da P la conica focale Γ , nella posizione che questa acquista dopo il rotolamento.

È bene evidente che le particolari trasformazioni infinitesime T , qui considerate, generano sistemi tripli coniugati, nei quali le superficie di una famiglia sono tutte applicabili sulla medesima quadrica.

3. Come ho sopra accennato, la trattazione analitica dei nostri sistemi tripli coniugati, in generale, richiede ulteriori considerazioni e sviluppi di calcolo, che sono da riservarsi a più ampia pubblicazione. Nella presente Nota mi limiterò a considerare tre casi più semplici, nei quali l'esistenza dei sistemi tripli coniugati e le formole relative si deducono facilmente dalle famiglie di Lamé di superficie a curvatura costante, dalle quali vengono a dipendere in modo geometrico assai semplice.

Il primo dei casi che vogliamo considerare è quello dei sistemi tripli coniugati con una famiglia di superficie deformate di *quadriche di rotazione*. Nelle mie ricerche del 1899 sulla inversione dei teoremi di Guichard ⁽¹⁾ ho dimostrato (al cap. IV, Mem. cit.) che ai sistemi tripli ortogonali con una serie di superficie costante, positiva o negativa, sono applicabili quelle trasformazioni *reali* composte di due trasformazioni opposte di Bäcklund, reali o puramente immaginarie, che nascono dalla inversione dei teoremi di Guichard.

Siano $(\Sigma), (\Sigma')$ due tali famiglie di Lamé di superficie a curvatura costante K , potendo K essere una costante assoluta, ovvero variabile colla superficie nella famiglia. Si sa che le normali a due superficie corrispondenti Σ, Σ' , in una coppia qualunque P, P' di punti corrispondenti, si incontrano in un punto P_0 equidistante da P, P' ; e se si fa variare la coppia (P, P') sulle due superficie Σ, Σ' , il punto P_0 descrive una deformata S_0 di una quadrica di rotazione, ed alle linee di curvatura di (Σ, Σ') corrisponde sopra S_0 il sistema coniugato permanente. Se facciamo variare Σ nella famiglia (Σ) [corrispondentemente Σ' in (Σ')], la S_0 descriverà alla sua volta una famiglia (S_0) di superficie applicabili sopra quadriche rotonde; queste quadriche coincideranno se K è una costante assoluta, e saranno invece diverse per K variabile. Ora si verifica che:

La famiglia (S_0) di deformate delle quadriche rotonde appartiene appunto ad uno dei nostri sistemi tripli coniugati.

Nel caso attuale è anche facile riconoscere l'esistenza delle trasformazioni B_k per le famiglie (S_0) (cfr. n. 1). E infatti, con una trasformazione arbitraria di Bäcklund, la coppia $(\Sigma), (\Sigma')$ di famiglie di Lamé si cangia

⁽¹⁾ Ved. la Memoria, *Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante*, Annali di matematica, ser. 3^a, tom. III.

in un'altra coppia che diciamo (\bar{S}) , (\bar{S}') nelle medesime condizioni. Questa ultima determina alla sua volta una nuova famiglia (\bar{S}_0) di deformate delle medesime quadriche rotonde, appartenente ad un triplo coniugato; ed ora sussiste la proprietà:

Le singole superficie S_0, \bar{S}_0 , corrispondenti nelle due famiglie (S_0) , (\bar{S}_0) , sono trasformate l'una dell'altra per una B_k .

4. Diamo ora le formole effettive per questi sistemi tripli coniugati con una famiglia (S_0) di deformate di quadriche rotonde.

Per questo, partiamo da un sistema triplo ortogonale (u, v, w) nel quale le $w = \text{cost}$ siano a curvatura costante K , dove K sarà, in generale, variabile con w . Per fissare le idee, prendiamo p. es. il caso di K positiva

$$K = \frac{1}{R^2}, \quad R = R(w),$$

e riferiamoci alla nota forma dell'elemento lineare dello spazio

$$(1) \quad ds^2 = \sinh^2 \theta du^2 + \cosh^2 \theta dv^2 + R^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \right)^2 dw^2,$$

dove $\theta = \theta(u, v, w)$ dovrà soddisfare al corrispondente sistema di equazioni a derivate parziali (di Lamé), che qui per brevità omettiamo di scrivere.

Si sa che le trasformazioni del sistema triplo ortogonale (u, v, w) , di cui è parola al n. prec., dipendono da un sistema lineare omogeneo di equazioni differenziali in una quaderna

$$\Phi, A, M, W$$

di funzioni incognite di u, v, w , che si scrive:

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial u} = \sinh \theta \cdot A, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \cosh \theta \cdot M, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial w} = R \frac{\partial \theta}{\partial w} \cdot W \\ \frac{\partial A}{\partial u} = -\frac{\partial \theta}{\partial v} M + c \sinh \theta \cdot \Phi - \frac{cR^2 + 1}{R} \cosh \theta \cdot W, \\ \qquad \qquad \qquad \frac{\partial A}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} M, \quad \frac{\partial A}{\partial w} = \frac{R}{\sinh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} \cdot W \\ \frac{\partial M}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v} A, \quad \frac{\partial M}{\partial v} = -\frac{\partial \theta}{\partial u} A + c \cosh \theta \cdot \Phi - \frac{cR^2 + 1}{R} \sinh \theta \cdot W, \\ \qquad \qquad \qquad \frac{\partial M}{\partial w} = \frac{R}{\cosh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} \cdot W \\ \frac{\partial W}{\partial u} = \frac{\cosh \theta}{R} A, \quad \frac{\partial W}{\partial v} = \frac{\sinh \theta}{R} M, \\ (cR^2 + 1) \frac{\partial W}{\partial w} = -cRR' \cdot W + cR \frac{\partial \theta}{\partial w} \cdot W - \frac{R}{\sinh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} A - \\ \qquad \qquad \qquad - \frac{R}{\cosh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} M, \end{array} \right.$$

dove c è una costante arbitraria, e si è posto

$$R' = \frac{dR}{dw}.$$

Il sistema (a) è illimitatamente integrabile e possiede l'integrale quadratico

$$(2) \quad A^2 + M^2 - c\Phi^2 + (cR^2 + 1)W^2 = \text{cost};$$

e noi assumiamo la quaderna (Φ, A, M, W) di soluzioni per modo che la costante nel secondo membro della (2) sia nulla, e si abbia quindi identicamente

$$(2^*) \quad A^2 + M^2 - c\Phi^2 + (cR^2 + 1)W^2 = 0.$$

Una tale quaderna (Φ, A, M, W) fissa appunto una delle indicate trasformazioni; ma a noi qui interessa soltanto di scrivere le formole che assegnano le corrispondenti superficie S_0 applicabili sopra quadriche rotonde (ellissoide allungato, ovvero iperboloide a due falde). Indicando con (x, y, z) un punto qualunque (u, v, w) dello spazio, con X_3, Y_3, Z_3 i coseni della direzione principale (w) , e con x_0, y_0, z_0 le coordinate del punto corrispondente di S_0 , abbiamo

$$(3) \quad x_0 = x - \frac{\Phi}{W} X_3, \quad y_0 = y - \frac{\Phi}{W} Y_3, \quad z_0 = z - \frac{\Phi}{W} Z_3.$$

Verifichiamo che queste definiscono in effetto un sistema triplo coniugato (u, v, w) , chè le altre proprietà descritte al n. 1 ne seguono immediatamente.

5. Per dimostrare che le (3) definiscono un sistema triplo coniugato bisogna provare (Darboux, loc. cit.) che x_0, y_0, z_0 sono tre soluzioni di un sistema simultaneo di equazioni (di Laplace) della forma

$$(a) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \log H_1}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \log H_2}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial v \partial w} = \frac{\partial \log H_2}{\partial w} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \log H_3}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial w} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial w} = \frac{\partial \log H_3}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial w} + \frac{\partial \log H_1}{\partial w} \frac{\partial \psi}{\partial u}, \end{cases}$$

ove H_1, H_2, H_3 sono tre convenienti funzioni.

Per questo si comincino a formare le derivate prime, rapporto ad u, v, w , delle (3), tenendo conto delle formole (a), e delle equazioni a cui soddisfano i coseni

$$(X_1, Y_1, Z_1), \quad (X_2, Y_2, Z_2), \quad (X_3, Y_3, Z_3)$$

delle tre direzioni principali nel sistema triplo ortogonale (1). Si trovano così le seguenti formole:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x_0}{\partial u} &= \frac{RW \sinh \theta - \Phi \cosh \theta}{RW^2} (WX_1 - \Lambda X_3) \\ \frac{\partial x_0}{\partial v} &= \frac{RW \cosh \theta - \Phi \sinh \theta}{RW^2} (WX_2 - MX_3) \\ \frac{\partial x_0}{\partial w} &= \frac{\Phi}{W} \left\{ \frac{R}{\sinh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} X_1 + \frac{R}{\cosh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} X_2 + \frac{\partial \log W}{\partial w} X_3 \right\}, \end{aligned} \right.$$

colle analoghe per y_0, z_0 .

Dopo ciò, se si calcolano le derivate seconde (miste) di

$$x_0, y_0, z_0,$$

si vede che queste sono, in effetto, tre soluzioni di un sistema (α), quando H_1, H_2, H_3 si assumano dati da

$$H_1 = \sinh \theta - \frac{\Phi}{RW} \cosh \theta, \quad H_2 = \cosh \theta - \frac{\Phi}{RW} \sinh \theta, \quad H_3 = \frac{\Phi}{W}.$$

Dunque: le formole (3) definiscono un sistema triplo coniugato, c. d. d.

6. La seconda classe di sistemi tripli coniugati, con una famiglia di deformate di quadriche, che vogliamo considerare, si ottiene molto più semplicemente dalle famiglie di Lamé a curvatura costante con una costruzione in termini finiti. Le quadriche di cui qui si tratta, sono le quadriche immaginarie (osculanti l'assoluto) di equazione

$$(4) \quad y^2 + z^2 + (x - y + iz)^2 = \frac{1}{K} \quad (K \text{ costante}).$$

Al § 447 delle *Lezioni* è ottenuta l'accennata costruzione per le superficie reali applicabili sulle quadriche immaginarie (4) appunto partendo dalle famiglie di Lamé a curvatura costante. Ora, colle nuove nozioni sui sistemi tripli coniugati, possiamo completare la costruzione colla proposizione seguente:

In ogni famiglia (Σ) di Lamé di superficie a curvatura costante K (variabile in generale con Σ), i piani osculatori, nei punti di una superficie Σ , delle curve traiettorie ortogonali della famiglia, involuppano una superficie S applicabile sulla quadrica (4); quando Σ descrive la famiglia (Σ) di Lamé, la S descrive una famiglia (S), appartenente ad uno dei nuovi sistemi tripli coniugati.

Per la dimostrazione si consideri ad esempio il caso di una famiglia (Σ) di Lamé a curvatura costante positiva, per la quale valgono le formole

del n. 4. Se con ξ, η, ζ indichiamo le coordinate di quel punto di Σ che corrisponde al punto (x, y, z) di Σ , troviamo

$$(5) \quad \xi = x + \frac{R^2}{\Phi} \left(\frac{1}{\sinh \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial u} X_1 + \frac{1}{\cosh \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial v} X_2 - \frac{R'}{R^2} X_3 \right),$$

colle analoghe per η, ζ , dove si è posto

$$\Phi = \frac{\partial \theta}{\partial w}.$$

Verificheremo anche qui che le (5) definiscono un sistema triplo (u, v, w) coniugato, provando che ξ, η, ζ sono soluzioni di un conveniente sistema (α) .

Pongasi, per brevità,

$$\Omega_x = \frac{1}{\sinh \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial u} X_1 + \frac{1}{\cosh \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial v} X_2 - \frac{R'}{R^2} X_3,$$

e analogamente si definiscano Ω_y, Ω_z , sicchè le (5) si scrivono anche

$$\xi = x + \frac{R^2}{\Phi} \Omega_x.$$

Derivando rapporto ad u, v, w , si trova dapprima

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \xi}{\partial u} = -\frac{R^2}{\Phi^2} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \left(\Omega_x + \frac{\Phi}{R} \coth \theta X_3 \right) \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} = -\frac{R^2}{\Phi^2} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \left(\Omega_x + \frac{\Phi}{R} \tanh \theta X_3 \right) \\ \frac{\partial \xi}{\partial w} = R \Phi X_3 + \frac{R^2}{\Phi} \frac{\partial \Omega_x}{\partial w} - \frac{R^2}{\Phi^2} \frac{\partial \Phi}{\partial w} \Omega_x + \frac{2RR'}{\Phi} \Omega_x, \end{array} \right.$$

e, costruendo le derivate seconde miste, si vede che ξ, η, ζ sono soluzioni di un sistema (α) , con

$$H_1 = \frac{1}{\Phi \sinh \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \quad H_2 = \frac{1}{\Phi \cosh \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \quad H_3 = \frac{1}{\Phi}.$$

Affatto analogamente si procederebbe nel caso di una famiglia pseudo-sferica (Σ) di Lamé.

Qui osserviamo ancora che l'esistenza delle trasformazioni B_k per questi sistemi tripli coniugati segue subito dall'esistenza delle trasformazioni di Bäcklund per le famiglie pseudosferiche di Lamé. E invero, se, con una trasformazione di Bäcklund, cangiamo la (Σ) in una nuova (Σ') , e con (S') indichiamo la famiglia che si ottiene da (Σ') colla stessa costruzione, si ha che: *I rispettivi sistemi tripli coniugati, cui appartengono le famiglie*

(S), (S') di deformate delle quadriche (4), provengono l'uno dall'altro per una trasformazione B_k .

7. Una terza ed ultima classe di sistemi tripli coniugati, che vogliamo considerare nella presente Nota, conterà di deformate di quei paraboloidi immaginari tangenti all'assoluto, le quali si ottengono applicando il nuovo metodo di Weingarten alle superficie di curvatura costante (¹).

Per restare nel caso più semplice, prendasi un sistema triplo ortogonale (u, v, w) in cui le $w = \text{cost}$ siano superficie pseudosferiche di raggio $= 1$ (sistema Weingarten), e sia

$$ds^2 = \cos^2 \theta du^2 + \sin^2 \theta dv^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \right)^2 dw^2$$

il quadrato dell'elemento lineare dello spazio, riferito al sistema triplo.

Indichiamo con

$$W_1 = SxX_1, \quad W_2 = SxX_2, \quad W_3 = SxX_3$$

le distanze algebriche dell'origine dalle tre facce del triedro principale nel punto (u, v, w) .

Dalle formole per le derivate dei coseni delle direzioni principali si traggono le seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W_1}{\partial u} &= \frac{\partial \theta}{\partial v} W_2 + \sin \theta W_3 + \cos \theta, & \frac{\partial W_1}{\partial v} &= \frac{\partial \theta}{\partial u} W_2, \\ & & \frac{\partial W_1}{\partial w} &= \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} W_3 \\ \frac{\partial W_2}{\partial u} &= -\frac{\partial \theta}{\partial v} W_1, & \frac{\partial W_2}{\partial v} &= -\frac{\partial \theta}{\partial u} W_1 - \cos \theta W_3 + \sin \theta \\ & & \frac{\partial W_2}{\partial w} &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} W_3 \\ \frac{\partial W_3}{\partial u} &= -\sin \theta W_1, & \frac{\partial W_3}{\partial v} &= \cos \theta W_2 \\ & & \frac{\partial W_3}{\partial w} &= -\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} W_1 - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} W_2. \end{aligned} \right\}$$

Possiamo ora determinare per quadrature tre funzioni incognite

$$(6) \quad \xi = \xi(u, v, w), \quad \eta = \eta(u, v, w), \quad \zeta = \zeta(u, v, w)$$

(¹) Ved. i §§ 1-4 della mia Memoria, *Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sui paraboloidi*, Annali di matematica, ser. 3^a, tom. X (1906).

dalle formole

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial u} = (x \cos \theta - X_3 \sin \theta) W_1, \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} = (x \sin \theta + X_3 \cos \theta) W_2, \\ \frac{\partial \xi}{\partial w} = \left(x \frac{\partial \theta}{\partial w} - \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} X_1 - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} X_2 \right) W_3, \end{cases}$$

e dalle analoghe, per η, ζ , le condizioni d'integrabilità essendo identicamente soddisfatte. Così le ξ, η, ζ sono determinate a meno di costanti additive, ed il sistema triplo (u, v, w) dato dalle (6) è fissato a meno di una traslazione nello spazio.

Ora le due prime formole della (7) sono quelle fornite dal metodo di Weingarten, applicato alle superficie pseudosferiche, onde risulta che nel sistema triplo (6) le superficie $w = \text{cost}$ sono tutte applicabili sul paraboloide

$$(8) \quad (x + iy)^2 + z^2 = x - iy.$$

Di più, sulle $w = \text{cost}$ le linee (u, v) sono quelle del sistema coniugato permanente. Per completare le verifiche e dimostrare che le (6) definiscono uno dei nostri sistemi tripli coniugati, resta solo da provare che ξ, η, ζ sono soluzioni di un sistema (α) n. 5. Ma se dalle (7) formiamo le derivate seconde miste, si vede che, in effetto, ξ, η, ζ soddisfano ad un sistema (α) , in cui si ha semplicemente

$$H_1 = W_1, \quad H_2 = W_2, \quad H_3 = W_3.$$

Da ultimo, se trasformiamo la famiglia pseudosferica (Σ) di Lamé in un'altra (Σ') , i due sistemi tripli coniugati con una famiglia di deformate del paraboloide (8) che se ne deducono, *collocati convenientemente nello spazio*, derivano l'uno dall'altro per una trasformazione B_k .

Matematica. — *Sulle equazioni alle derivate funzionali.*

Nota del Socio VITO VOLTERRA.

1. Nella classificazione dei problemi che dipendono dai concetti di funzioni di linee, dopo quelli di tipo algebrico (equazioni integrali ed equazioni funzionali) vengono le equazioni integro-differenziali e le equazioni alle derivate funzionali. Fra queste ultime di speciale interesse sono quelle che appartengono al tipo delle equazioni ai differenziali totali, che vennero in modo particolare studiate; ma conviene segnalarne altre di diverso tipo che pure è utile di esaminare. È ciò che mi permetto fare in questa brevissima Nota, limitandomi a darne degli esempî.

2. Denotiamo con $F|[\overset{1}{f}(x)]|$ una quantità che dipende da tutti i valori di $f(x)$ nell'intervallo 0,1, che sia derivabile e non abbia punti eccezionali ⁽¹⁾.

Vogliamo che essa soddisfi alla condizione

$$(1) \quad \int_0^1 f(\xi) F' | [f(x), \xi] | d\xi = 0,$$

ove $F' | [f(x), \xi] |$ denota la derivata di $F | [f(x)] |$ eseguita nel punto ξ .

Troviamo facilmente che la funzione

$$\Phi \left| \left[\frac{f(x)}{\int_0^1 f(\xi) d\xi} \right] \right|,$$

ove con Φ si denota una quantità che dipende in modo arbitrario da $\frac{f(x)}{\int_0^1 f(\xi) d\xi}$, ed è continua derivabile e senza punti eccezionali, soddisfa

alla (1). Reciprocamente se F soddisfa la (1) essa può mettersi sotto la forma precedente, perchè non deve cambiare moltiplicando $f(x)$ per una costante qualunque.

La (1) rappresenta una delle equazioni del nuovo tipo.

3. Consideriamo

$$F | [\alpha, \overset{1}{f}(x)] |$$

ove F dipende dal parametro α e dai valori di $f(x)$ in tutto l'intervallo 0,1 e non ha punti eccezionali. Esaminiamo la equazione

$$(2) \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \int_0^1 F' | [\alpha, f(x), \xi] | d\xi \int_0^1 \varphi(\xi, \eta) f(\eta) d\eta = 0,$$

⁽¹⁾ Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes*. Paris, Gauthier-Villars, 1913, pag. 29.

nella quale $\varphi(x, \eta)$ rappresenta una funzione nota delle due variabili ξ e η e

$$F'[[\alpha, f(x), \xi]]$$

indica la derivata funzionale di F rispetto a f , eseguita nel punto ξ .

La (2) rappresenta pure una delle equazioni del nuovo tipo.

La sua risoluzione può farsi dipendere dalla risoluzione della equazione integro-differenziale ⁽¹⁾

$$(3) \quad \frac{\partial f(\xi, \alpha)}{\partial \alpha} = \int_0^1 \varphi(\xi, \eta) f(\eta, \alpha) d\eta.$$

Posto

$$A(\xi, \eta | \alpha) = \alpha \varphi(\xi, \eta) + \frac{\alpha^2}{2!} \varphi^{\times \times}(\xi, \eta) + \frac{\alpha^3}{3!} \varphi^{\times \times \times}(\xi, \eta) + \dots,$$

ove gli asterischi denotano operazioni di composizione di 2^a specie, la soluzione della (3) è data da

$$f(\xi, \alpha) = \varphi(\xi) + \int_0^1 A(\xi, \eta | \alpha) \varphi(\eta) d\eta,$$

essendo $\varphi(\xi)$ una funzione arbitraria.

Ciò premesso, risolviamo l'equazione integrale

$$f(\xi) = \varphi(\xi, \alpha) + \int_0^1 A(\xi, \eta | \alpha) \varphi(\eta, \alpha) d\eta,$$

nella quale α figura come un parametro costante, e sia

$$\varphi(\xi, \alpha) = f(\xi) + \int_0^1 \lambda(\xi, \eta | \alpha) f(\eta) d\eta$$

la soluzione.

Il nucleo $\lambda(\xi, \eta | \alpha)$ si otterrà facilmente e sarà

$$\lambda(\xi, \eta | \alpha) = -\alpha \varphi(\xi, \eta) + \frac{\alpha^2}{2!} \varphi^{\times \times}(\xi, \eta) - \frac{\alpha^3}{3!} \varphi^{\times \times \times}(\xi, \eta) + \dots$$

giacchè si verifica immediatamente che

$$A(\xi, \eta | \alpha) + \lambda(\xi, \eta | \alpha) = - \int_0^1 A(\xi, \zeta | \alpha) \lambda(\zeta, \eta | \alpha) d\zeta.$$

Denoti ora $\Phi[[\theta(x)]]$ il simbolo di una quantità che dipende arbitrariamente da tutti i valori di $\theta(x)$ per x compreso fra 0 e 1, e sia continua derivabile e senza punti eccezionali. Se $\theta(x)$ dipenderà anche da un para-

⁽²⁾ Vedi Lezioni precedentemente citate cap. XIII.

metro α , Φ risulterà una funzione ordinaria del parametro stesso. In particolare si sostituisca per $\theta(x)$, $\Psi(x, \alpha)$; risulterà allora Φ una quantità che dipenderà da tutti i valori di $f(x)$ per x compreso fra 0 e 1, e sarà una funzione ordinaria del parametro α , cioè avremo ⁽¹⁾

$$(I) \quad F[\alpha, f(x)] = \Phi \left[f(x) + \int_0^1 \lambda(x, \eta | \alpha) f(\eta) d\eta \right].$$

Proviamo adesso che la (I) soddisfa l'equazione (2). La verifica è molto semplice. Deriviamo $\Phi[\theta(x)]$ per rapporto a $\theta(x)$ nel punto ξ : otterremo una quantità che oltre dipendere da $\theta(x)$ è una funzione di ξ . Scriviamola per semplicità $\Phi'(\xi)$. Calcoliamo ora δF . Risulterà

$$\delta F = \int_0^1 \Phi'(\xi) \left\{ \delta f(\xi) + \int_0^1 \lambda(\xi, \eta | \alpha) \delta f(\eta) d\eta + \right. \\ \left. + \int_0^1 \frac{\partial \lambda(\xi, \eta | \alpha)}{\partial \alpha} f(\eta) d\eta \delta \alpha \right\} d\xi,$$

quindi

$$F'[\alpha, f(x), \xi] = \Phi'(\xi) + \int_0^1 \Phi'(\eta) \lambda(\eta, \xi | \alpha) d\eta \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha} = \int_0^1 \Phi'(\xi) d\xi \int_0^1 \frac{\partial \lambda(\xi, \eta | \alpha)}{\partial \alpha} f(\eta) d\eta.$$

Onde il primo membro della (2) si scriverà, sostituendovi le espressioni precedenti

$$(4) \quad \int_0^1 \Phi'(\xi) d\xi \int_0^1 f(\eta) d\eta \times \\ \times \left[\frac{\partial \lambda(\xi, \eta | \alpha)}{\partial \alpha} + \varphi(\xi, \eta) + \int_0^1 \lambda(\xi, \zeta | \alpha) \varphi(\zeta, \eta) d\zeta \right].$$

(¹) Se per esempio prendiamo

$$\Phi \left[\int_0^1 \theta(x) dx \right] = \int_0^1 \lambda(x) \theta(x) dx,$$

ove $\lambda(x)$ è una certa funzione determinata, sarà

$$F \left[\int_0^1 f(x) dx, \alpha \right] = \int_0^1 \lambda(x) \Psi(x, \alpha) dx.$$

Se prendiamo invece

$$\Phi \left[\int_0^1 \theta(x) dx \right] = \int_0^1 \int_0^1 \mu(x, y) \theta(x) \theta(y) dx dy$$

sarà

$$F \left[\int_0^1 f(x) dx, \alpha \right] = \int_0^1 \int_0^1 \mu(x, y) \Psi(x, \alpha) \Psi(y, \alpha) dx dy,$$

e così di seguito.

Ma dalla espressione trovata superiormente per $\lambda(\xi, \eta | \alpha)$ si ricava

$$\frac{\partial \lambda(\xi, \eta | \alpha)}{\partial \alpha} + \varphi(\xi, \eta) + \int_0^1 \lambda(\xi, \zeta | \alpha) \varphi(\zeta, \eta) d\zeta = 0,$$

dunque la (4) sarà nulla qualunque siano $\Phi'(\xi)$ e $f(\eta)$ e per conseguenza la (2) è verificata comunque si prendano Φ ed f .

4. I procedimenti indicati, come in tutti i casi analoghi, possono facilmente farsi discendere dal noto concetto di passaggio dal finito all'infinito, che informa tutti i procedimenti dell'analisi a cui appartengono le questioni trattate. È interessante osservare come negli integrali compariscono delle *funzioni arbitrarie di linee*.

5. Di uno speciale interesse sono la equazione

$$(5) \quad \int_0^1 \int_0^1 F''[f(x), \xi, \eta] K(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0,$$

in cui F'' è la derivata seconda di $F[f(x)]$ eseguita nei punti ξ e η , e l'altra analoga

$$(5') \quad \int_0^1 F''[f(x), \xi, \xi] d\xi + \int_0^1 \int_0^1 F''[f(x), \xi, \eta] H(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0,$$

ove

$$F''[f(x), \xi, \xi] = \lim_{\eta \rightarrow \xi} F''[f(x), \xi, \eta].$$

Esse possono considerarsi come equazioni tipiche corrispondenti alle equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine a coefficienti costanti, e possono rispettivamente chiamarsi *equazioni lineari alle derivate funzionali del 2° ordine di 1ª e di 2ª specie*.

6. Supponiamo, nella (5),

$$K(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n a_{is} \varphi_i(\xi) \varphi_s(\eta), \quad a_{is} = a_{si}$$

ove le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sono normalizzate.

Prendiamo la forma reciproca

$$G(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n b_{is} \varphi_i(\xi) \varphi_s(\eta), \quad b_{is} = b_{si}$$

tale, cioè, che

$$\sum_{i=1}^n a_{in} b_{ns} = \begin{cases} 0, & i \neq s \\ 1, & i = s \end{cases}.$$

Poniamo

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 G(\xi, \eta) f(\xi) f(\eta) d\xi d\eta = e$$

e cerchiamo le funzioni

$$\theta(\rho) = F \left| \left[f \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] \right|$$

che soddisfano la (5).

Avremo

$$F' \left| \left[f(x), \xi \right] \right| = \theta'(\rho) \int_0^1 G(\xi, x) f(x) dx$$

$$F'' \left| \left[f(x), \xi, \eta \right] \right| = \theta''(\rho) \int_0^1 G(\xi, x) f(x) dx \int_0^1 G(\eta, y) f(y) dy + \\ + \theta'(\rho) G(\xi, \eta),$$

e quindi

$$\int_0^1 \int_0^1 F'' \left| \left[f(x), \xi, \eta \right] \right| K(\xi, \eta) d\xi d\eta = 2\theta''(\rho) e + n\theta'(\rho).$$

Se dunque la (5) deve essere soddisfatta, sarà

$$(II) \quad \theta(r) = A \rho^{-\frac{n}{2}+1} + B,$$

A e B essendo due costanti arbitrarie.

7. Passiamo adesso alla (5'). Potremo sempre supporre $H(x, y)$ simmetrica. Calcoliamo $L(x, y)$ tale da soddisfare il principio di reciprocità ⁽¹⁾, cioè

$$(6) \quad H(x, y) + L(x, y) = - \int_0^1 H(x, \xi) L(\xi, y) d\xi,$$

ammesso diverso da zero il determinante.

Si riconosce facilmente che $L(x, y)$ sarà simmetrico, e che H ed L saranno permutabili di 2^a specie.

Poniamo

$$r = \frac{1}{2} \int_0^1 f^2(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 L(\xi, \eta) f(\xi) f(\eta) d\xi d\eta$$

e cerchiamo le funzioni

$$\theta(r) = F \left| \left[f \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] \right|$$

⁽¹⁾ Vedi Volterra, *Leçons sur les équations intégrales et intégréo-différentielles*, Paris, Gauthier-Villars, 1913, pag. 105.

che soddisfano la (5'). Avremo

$$(7) \quad F'[\varphi(x), \xi] = \theta'(r) \left\{ f(\xi) + \int_0^1 L(\xi, x) f(x) dx \right\}$$

$$(7') \quad F''[\varphi(x), \xi, \eta] = \theta''(r) \left\{ f(\xi) + \int_0^1 L(\xi, x) f(x) dx \right\} \times \\ \times \left\{ f(\eta) + \int_0^1 L(\eta, y) f(y) dy \right\} + \theta'(r) L(\xi, \eta).$$

Per conseguenza,

$$(8) \quad \int_0^1 F''[\varphi(x), \xi, \xi] d\xi + \int_0^1 \int_0^1 F''[\varphi(x), \xi, \eta] H(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ = \theta''(r) \left\{ \int_0^1 f^2(\xi) d\xi + \int_0^1 \int_0^1 M(\xi, \eta) f(\xi) f(\eta) d\xi d\eta \right\} \\ + \theta'(r) \left\{ \int_0^1 \int_0^1 L(\xi, \eta) H(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int_0^1 L(\xi, \xi) d\xi \right\},$$

ove

$$M = H + 2 \overset{\times \times \times \times}{H L} + \overset{\times \times \times \times}{H L^2} + \overset{\times \times}{L^2} + 2 L$$

in cui si è fatto uso, come precedentemente nel § 3, della notazione che rappresenta la composizione di 2^a specie (1).

Ma in virtù della (6), che si può scrivere

$$H + L = - \overset{\times \times \times \times}{H L},$$

abbiamo

$$\overset{\times \times \times \times}{H L^2} = - \overset{\times \times}{L^2} + H + L:$$

quindi

$$M = H - 2H - 2L - \overset{\times \times}{L^2} + H + L + \overset{\times \times}{L^2} + 2L = L.$$

Si ha, poi,

$$\int_0^1 \int_0^1 L(\xi, \eta) H(\xi, \eta) d\xi d\eta = - \int_0^1 \{ L(\xi, \xi) + H(\xi, \xi) \} d\xi,$$

(1) Vedi Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris, Gauthier-Villars, 1913, pag. 179.

onde la (8) si scriverà

$$\Omega = \int_0^1 F'' | [f(x), \xi, \xi] | d\xi + \int_0^1 \int_0^1 F'' | [f(x), \xi, \eta] | H(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ = 2\theta''(r) r - h\theta'(r),$$

ove

$$L = \int_0^1 H(\xi, \xi) d\xi.$$

Affinchè la (5') sia soddisfatta, basterà dunque prendere

$$(III) \quad \theta(r) = A r^{\frac{h}{2}+1} + B,$$

A e B essendo due costanti arbitrarie.

Si è così riesciti ad ottenere gli integrali (II) e (III) delle equazioni del 2° ordine lineari alle derivate funzionali di 1^a e di 2^a specie considerate analoghi a quelli sui quali si applica l'analisi di Green.

8. Dalla (7) segue

$$\delta F' | [f(x), \xi] | = \theta'(r) \delta f(\xi) + \int_0^1 F'' | [f(x), \xi, \eta] | \delta f(\eta) d\eta$$

il punto ξ è quindi eccezionale ⁽¹⁾ e $\theta'(r)$ è il coefficiente differenziale di $\delta f(x)$.

Facendo uso di una notazione adottata fino dai miei primi lavori sopra questo soggetto ⁽²⁾ potremo scrivere

$$\left(F' | [f(x), \xi] | \right)'_{f(\xi)} = \theta'(r).$$

Avremo dunque

$$\Omega + \int_0^1 \left(F' | [f(x), \xi] | \right)'_{f(\xi)} M(\xi) d\xi = 2\theta''(r) r + (m - h) \theta'(r),$$

ove si è posto

$$m = \int_0^1 M(\xi) d\xi.$$

Preso dunque

$$(IV) \quad F | [f(x)]^1_0 | = \theta(r) = A r^{\frac{h-m}{2}+1} + B$$

con A e B costanti, essa verificherà l'equazione

$$\int_0^1 F'' | [f(x), \xi, \xi] | d\xi + \int_0^1 \int_0^1 F'' | [f(x), \xi, \eta] | H(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\ + \int_0^1 \left(F' | [f(x), \xi] | \right)'_{f(\xi)} M(\xi) d\xi = 0.$$

⁽¹⁾ Volterra, *Leçons sur les équations intégrales et intégrô-différentielles*, Chap. I, § VII.

⁽²⁾ *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni*, Nota II, § 4, 14. Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, 18 sett. 1887.

In cotesti criteri, le quantità $\lambda, \mu, \lambda_{\alpha\alpha}, \mu_{\alpha}$ s'intendono assunte così:

$$(I)_1 \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\lambda \geq p_{ii} & (i = 1, 2, \dots, n) \\ \mu \geq |p_{ij}| & (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (1) \\ -\lambda_{\alpha\alpha} \geq p_{\alpha\alpha} \\ \mu_{\alpha} \geq |p_{\alpha r}| & (s, r = 1, 2, \dots, \alpha - 1, \alpha + 1, \dots, n). \end{array} \right.$$

I seguenti criteri (cioè terzo e quarto) valgono nell'ipotesi $p_{ii} \neq p_{jj}$ ($i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n$).

TERZO CRITERIO:

$$\lambda - (n - 1) \nu \geq 0,$$

dove ν è una quantità positiva, assunta in modo che si abbia simultaneamente

$$(I)_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu \geq |p_{sj}|, \quad \nu \geq \left| \frac{p_{se} p_{ej}}{p_{ee} - p_{ss}} \right|, \quad \nu \geq \left| \frac{p_{se} p_{es}}{p_{ee} - p_{ss}} \right| \\ (j \neq s; j, s = 1, 2, \dots, s - 1, s + 1, \dots, n), \end{array} \right.$$

essendo p_{ee} la maggiore fra le costanti p_{ii} ($i = 1, 2, \dots, n$).

QUARTO CRITERIO:

$$\lambda - (n - 1) \nu_{\alpha} \geq 0$$

(almeno in corrispondenza di un certo valore dell'indice α), intendendo assunta la quantità ν_{α} in modo che si abbia simultaneamente

$$(I)_3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu_{\alpha} \geq \left| \frac{p_{sa} p_{as}}{p_{aa} - p_{ss}} \right|, \quad \nu_{\alpha} \geq |p_{sj}| + \left| \frac{p_{sa} p_{aj}}{p_{aa} - p_{ss}} \right| \\ (j \neq s; j, s = 1, 2, \dots, \alpha - 1, \alpha + 1, \dots, n). \end{array} \right.$$

Nella prima, nella seconda e nella quarta delle $(I)_1$ e nella $(I)_2$ ed $(I)_3$, il segno di eguaglianza è necessariamente vincolato. Così, per esempio (qualora le p_{ii} non siano tutte fra loro eguali), nelle $-\lambda \geq p_{ii}$ il segno di eguaglianza potrà sussistere, volendo, soltanto in corrispondenza della massima delle p_{ii} .

Ciò premesso, notando che, qualora le p_{ii} ($i = 1, 2, \dots, n$) non siano tutte negative, i criteri primo, terzo e quarto non risultano soddisfatti: ed osservando, d'altra parte, la struttura del secondo criterio, parrebbe, a prima giunta, che tutti i suddetti criteri comportassero un campo ristretto di sfruttamento. Invece, siamo in presenza effettivamente del contrario, come mi accingo a mostrare.

(1) Il simbolo $||$ significa che va preso il valore assoluto della quantità racchiusa dal simbolo stesso.

dove le $p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, q_1^{(1)}, q_2^{(1)}$ sono costanti. È implicitamente inteso che il determinante

$$D = \begin{vmatrix} p_1^{(1)} & p_2^{(1)} \\ q_1^{(1)} & q_2^{(1)} \end{vmatrix}$$

sia diverso da zero.

Il sistema (1) si trasformerà, allora, in un sistema nelle $y^{(1)}$, sistema che intenderò risoluto rispetto alle derivate delle $y^{(1)}$ medesime. Allora, designando con $p_{11}^{(1)}$ e $p_{22}^{(1)}$ i coefficienti rispettivi di $y_1^{(1)}$ ed $y_2^{(1)}$ nelle prime due equazioni del sistema così trasformato, risulta che, ponendo

$$(6) \quad p_1^{(1)} p_2^{(1)} = p^{(1)}, \quad p_1^{(1)} q_2^{(1)} = u^{(1)}, \quad p_2^{(1)} q_1^{(1)} = v^{(1)}, \quad q_1^{(1)} q_2^{(1)} = q^{(1)},$$

avremo

$$(7) \quad \begin{cases} p_{11}^{(1)} D = p_{11} u^{(1)} - p_{21} p^{(1)} + p_{12} q^{(1)} - p_{22} v^{(1)} \\ p_{22}^{(1)} D = p_{21} p^{(1)} - p_{11} v^{(1)} + p_{22} u^{(1)} - p_{12} q^{(1)}. \end{cases}$$

Mediante addizione delle (7) fra loro, si ha

$$(p_{11}^{(1)} + p_{22}^{(1)}) D = (p_{11} + p_{22}) (u^{(1)} - v^{(1)}).$$

Ma

$$u^{(1)} - v^{(1)} = D,$$

dunque

$$(8) \quad p_{11}^{(1)} + p_{22}^{(1)} = p_{11} + p_{22},$$

come risulta pure dalla teoria degli invarianti delle equazioni differenziali lineari ⁽¹⁾.

La (8) rappresenta l'unica condizione, alla quale dovranno soddisfare i nuovi coefficienti $p_{11}^{(1)}$ e $p_{22}^{(1)}$: cioè, scelti $p_{11}^{(1)}$ e $p_{22}^{(1)}$ in modo che la (8) sia soddisfatta, esisterà sempre una sostituzione del tipo considerato, che porta il sistema (1) in un sistema nelle $y^{(1)}$, nel quale i coefficienti di $y_1^{(1)}$ e di $y_2^{(1)}$ saranno rispettivamente le costanti di $p_{11}^{(1)}$ e $p_{22}^{(1)}$ scelte. Infatti, la coesistenza delle (6) richiede $p^{(1)} q^{(1)} = u^{(1)} v^{(1)}$, cioè

$$(9) \quad p^{(1)} = w_1 v^{(1)}, \quad u^{(1)} = w_1 q^{(1)},$$

dove w_1 è arbitraria. Sicchè, assegnato a D un valore diverso da zero, ma, del resto, qualunque, le (7) diventano, in $u^{(1)}$ e $v^{(1)}$, le seguenti equazioni:

$$(10) \quad \begin{cases} (p_{11} w_1 + p_{12}) u^{(1)} - (p_{21} w_1^2 + p_{22} w_1) v^{(1)} = w_1 p_{11}^{(1)} D \\ (p_{22} w_1 - p_{12}) u^{(1)} + (p_{21} w_1^2 - p_{11} w_1) v^{(1)} = w_1 p_{22}^{(1)} D, \end{cases}$$

⁽¹⁾ Per la bibliografia relativa a cotesta teoria, vedasi, p. es., Pincherle e Amaldi, *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi*, Bologna, 1901, pag. 474.

le quali sono sempre possibili, giacchè il determinante relativo alle medesime è

$$p_{21}(p_{11} + p_{22})w_1^3 + (p_{22}^2 - p_{11}^2)w_1^2 - p_{12}(p_{11} + p_{22})w_1,$$

il quale, soltanto nel caso $p_{12} = p_{21} = 0$, $p_{11} = p_{22}$, oppure nell'altro $p_{11} = p_{22} = 0$, risulta identicamente nullo, casi nei quali le (10) rappresentano un'unica equazione. Qualora le (10) non rappresentino un'unica equazione, avremo, mediante addizione delle (10) medesime fra loro.

$$u^{(1)} - v^{(1)} = D.$$

Qualora invece le (10) rappresentino un'unica equazione, occorrerà accoppiare, con la medesima, l'altra $u^{(1)} - v^{(1)} = D$.

Avute le $u^{(1)}$ e $v^{(1)}$, le (9) porgeranno (intendendovi w_1 diversa da zero) le $p^{(1)}$ e $q^{(1)}$. Avremo, poi, nei riguardi delle $p_1^{(1)}$, $p_2^{(1)}$, $q_1^{(1)}$, $q_2^{(1)}$, le equazioni (6), che potremo, p. es., trattare così: Si assumano $p_1^{(1)}$ e $p_2^{(1)}$ in modo che si abbia $p_1^{(1)} p_2^{(1)} = p^{(1)}$. Allora, nei riguardi delle $q_1^{(1)}$ e $q_2^{(1)}$, avremo le equazioni

$$(11) \quad p_1^{(1)} q_2^{(1)} = u^{(1)}, \quad p_2^{(1)} q_1^{(1)} = v^{(1)}.$$

Si osservi, intine, che, avendosi $u^{(1)} v^{(1)} = p^{(1)} q^{(1)}$, risulterà evidentemente $p_1^{(1)} q_2^{(1)} \cdot p_2^{(1)} q_1^{(1)} = p^{(1)} q^{(1)}$, cioè $p^{(1)} q_1^{(1)} q_2^{(1)} = p^{(1)} q^{(1)}$. Da cui, qualora $p^{(1)}$ non sia nulla, segue $q_1^{(1)} q_2^{(1)} = q^{(1)}$. Invece, nel caso speciale della $p^{(1)}$ nulla, avremo (essendo w_1 diversa da zero) nulla la $v^{(1)}$, e quindi $u^{(1)} = D$, sicchè $p_1^{(1)}$ sarà anche allora diversa da zero, mentre $p_2^{(1)}$ sarà nulla, avendosi $p_1^{(1)} p_2^{(1)} = p^{(1)}$. Per cui, in cotesto caso speciale, la seconda delle (11) diventa un'identità, mentre la $q_1^{(1)} q_2^{(1)} = q^{(1)}$, anzichè una conseguenza di precedenti risultati, sarà l'equazione da accoppiarsi con la $p_1^{(1)} q_2^{(1)} = u^{(1)}$.

Ora, operando sulle $y^{(1)}$ la sostituzione

$$\begin{cases} y_1^{(1)} = y_1^{(2)} \\ y_2^{(1)} = p_1^{(2)} y_2^{(2)} + p_2^{(2)} y_3^{(2)} \\ y_3^{(1)} = q_1^{(2)} y_2^{(2)} + q_2^{(2)} y_3^{(2)} \\ y_j^{(1)} = y_j^{(2)} \quad (j = 4, 5, \dots, n), \end{cases}$$

ed indicando con $p_{22}^{(2)}$ e $p_{33}^{(2)}$ i coefficienti rispettivi di $y_2^{(2)}$ ed $y_3^{(2)}$ nel sistema trasformato, avremo

$$p_{22}^{(2)} + p_{33}^{(2)} = p_{22}^{(1)} + p_{33}^{(1)},$$

ovvero

$$p_{22}^{(2)} + p_{33}^{(2)} = p_{22}^{(1)} + p_{33},$$

giacchè $p_{33}^{(1)} = p_{33}$. Analogamente proseguendo, avremo

$$p_{33}^{(3)} + p_{44}^{(3)} = p_{33}^{(2)} + p_{44}; \text{ ecc.}$$

Sicchè, denotando, col sistema (5), l'ultimo sistema, al quale conducono quelle successive trasformazioni, risulterà

$$q_{11} = p_{11}^{(1)}, q_{22} = p_{22}^{(2)}, \dots, q_{nn} = p_{nn}^{(n-1)}.$$

Ora, osservando che

$$q_{11} + q_{22} + \dots + q_{nn} = p_{11} + p_{22} + \dots + p_{nn}$$

rappresenta, in virtù delle precedenti considerazioni, l'unica condizione, alla quale devono soddisfare le q_{ii} ($i = 1, 2, \dots, n$), risulta chiaramente che, qualora sussista la (4), si può sempre ottenere che nel sistema (5) tutte le q_{ii} ($i = 1, 2, \dots, n$) siano negative.

Infine, qualora, in corrispondenza del sistema (5), resulti soddisfatto qualcuno dei criterî da me dati, le soluzioni del sistema stesso saranno certamente stabili e, quindi, tali saranno anche quelle del sistema (1), giacchè la stabilità non si perde attraverso sostituzioni lineari a coefficienti costanti.

Matematica. — *Sur les fonctionnelles d'ordre entier d'approximation.* Nota di R. GATEAUX, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

I. — PRÉLIMINAIRES.

Désignons par Ω l'ensemble des fonctions réelles $z(\alpha)$ de la variable réelle α définies et continues pour $0 < \alpha \leq 1$ et telles que $0 < z(\alpha) > 1$.

Soit $U[z]$ une fonctionnelle définie, réelle et bornée dans Ω . Nous nous proposons de déterminer une fonctionnelle d'ordre n d'approximation de $U[z]$, c'est-à-dire une fonctionnelle $V[z]$ d'ordre n , telle que, si $V'[z]$ est une autre fonctionnelle d'ordre n , on ait:

$$\text{maximum } |U[z] - V[z]| < \text{maximum } |U[z] - V'[z]|.$$

On voit immédiatement qu'on peut se borner aux fonctionnelles d'ordre n réelles et c'est ce que nous ferons par la suite.

LEMME. — *Tout ensemble de fonctionnelles d'ordre n bornées dans leur ensemble dans Ω est compact: c'est-à-dire que de toute infinité d'entre elles on peut extraire une suite tendant (uniformément ou non) vers une limite.*

D'après un théorème de M. Fréchet (*Sur quelques points du calcul fonctionnel*, n° 19, Circolo matematico di Palermo, 1906), il suffit pour cela que les fonctionnelles de l'ensemble soient bornées et également continues en toute fonction z .

La première condition est satisfaite par hypothèse. Quant à la seconde, on démontre sans difficulté que les fonctionnelles de l'ensemble sont également continues dans tout le champ Ω .

II. — EXISTENCE ET PROPRIÉTÉS DES FONCTIONNELLES D'ORDE n D'APPROXIMATION.

THÉORÈME. *Toute fonctionnelle $U[z]$ définie, réelle et bornée dans Ω admet une fonctionnelle d'ordre n d'approximation.*

Utilisant le lemme précédent, on établit ce théorème par la méthode qu'a exposée M. Borel pour les fonctions d'une variable (*Fonctions de variables réelles*, page 82).

THÉORÈME. *Il existe des fonctionnelles $U[z]$ admettant plusieurs fonctionnelles d'ordre n d'approximation, même si ces fonctionnelles $U[z]$ sont assujetties à être uniformément continues.*

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème correspondant démontré par M. Tonelli (*Annali di Matematica pura ed applicata*, 1908), pour les fonctions continues de deux variables qui sont des fonctionnelles uniformément continues particulières. L'exemple suivant est plus simple que celui qu'a formé M. Tonelli.

Rappelons d'abord une remarque de cet auteur. Soit la fonction $F(x, y)$ définie et continue pour $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$. Soit \bar{y} une valeur particulière de y , $\Pi_n(x)$ le polynôme de degré n d'approximation de $F(x, \bar{y})$, μ le maximum de $|F(x, \bar{y}) - \Pi_n(x)|$.

Soit $\Pi_n(x, y)$ un polynôme de degré n d'approximation de $F(x, y)$ et μ' le maximum de $|F(x, y) - \Pi_n(x, y)|$.

On a nécessairement $\mu' \geq \mu$. Il en résulte que si, par un moyen quelconque, on trouve un polynôme $P(x, y)$ de degré n tel que $|F(x, y) - P(x, y)| \leq \mu$, $P(x, y)$ est nécessairement un polynôme de degré n d'approximation.

Venons maintenant à notre exemple. Nous allons définir, dans le domaine $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq 1$, une fonction continue $F(x, y)$ admettant plusieurs polynômes de degré n d'approximation.

Soient $f(x)$ une fonction continue pour $a \leq x \leq b$ et qui ne soit pas un polynôme de degré n ; $\Pi_n(x)$ son polynôme de degré n d'approximation; μ le maximum de $|f(x) - \Pi_n(x)|$. Posons :

$$F(x, y) = f(x) + y[\Pi_n(x) - f(x)].$$

Considérons les polynômes de degré n :

$$\Pi_n(x, y) = \Pi_n(x) + \lambda y.$$

Il suffit de former la différence $F(x, y) - \Pi_n(x, y)$ pour constater que son module reste inférieur ou égal à μ tant que $|\lambda| \leq 1$. Tous les polynômes $\Pi_n(x, y)$ pour lesquels $|\lambda| \leq 1$ sont donc d'approximation.

Continuité de la correspondance. — Si la correspondance entre une fonctionnelle bornée et ses fonctionnelles d'ordre n d'approximation n'est pas univoque, elle est en un certain sens continue:

THÉOREME. Soient $U_1[z], \dots, U_p[z], \dots$ une suite de fonctionnelles bornées dans Ω et tendant uniformément vers la fonctionnelle $U[z]$. Soient $W_1^{(n)}[z], \dots, W_p^{(n)}[z], \dots$ des fonctionnelles d'ordre n d'approximation de U_1, \dots, U_p, \dots . Cette suite $W_p^{(n)}$ admet au moins un élément limite et chacun de ses éléments limites est une fonctionnelle d'ordre n d'approximation de $U[z]$. De plus les approximations obtenues pour U_1, \dots, U_p, \dots tendent vers une limite égale à l'approximation obtenue pour U .

Les fonctionnelles bornées U_p tendant uniformément vers une limite sont bornées dans leur ensemble et U est également bornée. Par suite les $W_p^{(n)}$ sont aussi bornées dans leur ensemble: elles forment un ensemble compact d'après le lemme du début, c'est-à-dire qu'elles admettent au moins un élément limite.

Soit $W^{(n)}[z]$ un de ces éléments limites. Ce ne peut être qu'une fonctionnelle d'ordre n . Je dis qu'elle est d'approximation pour U .

De la suite $W_p^{(n)}$ j'extrais une suite tendant vers $W^{(n)}$; ou encore je puis supposer que c'est la suite $W_p^{(n)}$ qui tend vers $W^{(n)}$. Soient μ_p le maximum de $|U_p[z] - W_p^{(n)}[z]|$ et μ la plus petite limite des nombres μ_p .

Je démontre qu'il ne peut exister une fonctionnelle d'ordre n donnant de $U[z]$ une approximation inférieure à μ . Car une telle fonctionnelle donnerait pour certaines grandes valeurs de p une meilleure approximation de U_p que $W_p^{(n)}$.

Je démontre ensuite que $W^{(n)}$ donne pour U une approximation égale à μ . C'est donc une fonctionnelle d'approximation.

Enfin je démontre que la suite μ_p , ou toute autre suite analogue, a une seule valeur limite égale à μ . Car si une telle suite admettait une valeur limite $\mu' > \mu$, on pourrait en extraire une autre suite admettant μ' comme plus petit élément limite; alors le raisonnement de l'avant-dernier paragraphe montrerait qu'on ne peut pas obtenir pour U une approximation égale à $\mu < \mu'$. Ou bien une telle suite admettrait une valeur limite $\mu'' < \mu$; alors le raisonnement du dernier paragraphe montrerait qu'on peut obtenir pour U une approximation égale à $\mu'' < \mu$. Ces deux conclusions sont également absurdes.

III. — APPLICATION À LA REPRÉSENTATION DE CERTAINES FONCTIONNELLES.

Soit $U[z]$ une fonctionnelle qui soit dans Ω limite d'une suite de fonctionnelles d'ordres entiers, la convergence étant uniforme dans tout le champ Ω .

Soient $W^{(1)}[z], \dots, W^{(p)}[z], \dots$ une suite de fonctionnelles d'ordres $1, \dots, p, \dots$ d'approximation de $U[z]$.

Le raisonnement employé dans le cas des fonctions d'une variable montre que cette suite converge uniformément vers U . De plus toute autre suite de fonctionnelles d'ordres $1, \dots, p, \dots$ fournissent pour U des approximations inférieures ou égales à celles que fournissent les fonctionnelles correspondantes de la suite $W^{(p)}$.

Matematica. — *Sur les involutions douées d'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique.* Nota di LUCIEN GODEAUX, presentata dal Corrispondente FRANCESCO SEVERI.

Les involutions doublement infinies, appartenant à une surface algébrique, possèdent un nombre infini ou un nombre fini de points unis. Les involutions jouissant de cette dernière propriété ont été l'objet, ces derniers temps, de plusieurs travaux.

MM. Enriques et Severi d'une part ⁽¹⁾, MM. Bagnera et De Franchis d'autre part ⁽²⁾, ont étudié les involutions appartenant à une surface de Jacobi ou de Picard; ensuite, M. Enriques a étudié les involutions de genres un appartenant à une surface de genres un ⁽³⁾; enfin, j'ai considéré les involutions de genres zéro et de bigenre un existant sur une surface également de genres zéro et de bigenre un ⁽⁴⁾. Toutes ces involutions possèdent une propriété commune: elles sont engendrées par un groupe de transformations birationnelles de la surface en elle-même. J'ai observé récemment que cette propriété pouvait s'étendre aux involutions appartenant à une surface algébrique quelconque, pourvu qu'elles ne possèdent qu'un nombre fini de points unis. C'est ce résultat que je me propose d'exposer ici. D'une manière plus précise, j'établirai que:

Si une involution, appartenant à une surface algébrique, ne possède qu'un nombre fini (éventuellement nul) de points unis, cette involution est

⁽¹⁾ *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques.* Acta Mathematica (1909), vol. XXXII, pag. 283; vol. XXXIII, pag. 321 (Prix Bordin, 1907).

⁽²⁾ *Le superficie algebriche le quali ammettono...* Memorie della Società dei XL (1908), ser. 3^a, vol. XV, pag. 251.

⁽³⁾ *Sulle trasformazioni razionali delle superficie di genere uno.* Rend. R. Accad. di Bologna, 1909-1910, pag. 71. Le théorème établi par M. Enriques dans cette Note m'a permis de classer toutes les involutions de genres un appartenant à une surface de genres un. L'ordre de ces involutions ne peut être que 2, 3, 4, 6, 8 ou 12. Un Mémoire sur ce sujet paraîtra prochainement dans les Annales de l'École Normale Supérieure.

⁽⁴⁾ *Sur les involutions appartenant à une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_s = 1$* [Bull. de la Soc. Math. de France (1913), tom. XLI, pag. 178]; *Détermination des correspondances rationnelles existant entre deux surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, $P_s = 1$* [Bulletin de l'Acad. Romaine (1913), tom. II, pag. 65].

engendrée par un groupe de transformations birationnelles de la surface en elle-même.

En d'autres termes, je démontrerai que les points d'un groupe de l'involution dépendent rationnellement de l'un d'entre eux.

Si nous examinons les démonstrations du théorème de MM. Enriques et Severi, de celui de M. Enriques et du mien, nous voyons qu'elles procèdent toutes suivant les mêmes lignes générales. Je procéderai ici de la même manière.

Etant donnée, sur une surface algébrique, une involution (doublement infinie) I_n , d'ordre $n (> 2)$, douée d'un nombre fini de points unis, nous considérons, sur cette surface, un système continu complet $\{C\}$. Désignons par K les courbes transformées des courbes C au moyen de la correspondance $(n-1, n-1)$ déterminée par I_n entre les points de la surface.

Nous supposons, en premier lieu, que les courbes K sont irréductibles; et nous démontrons que ces courbes K sont comprises dans un système complet dont la dimension surpasse celle de $\{C\}$. Il suffit alors d'utiliser une extension du raisonnement fait par MM. Enriques et Severi dans leur *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* ⁽¹⁾ pour être conduit à une absurdité.

Le même procédé permet de démontrer que les courbes K sont précisément réductibles en $n-1$ courbes. Le théorème que nous avons en vue, s'établit dès lors sans difficulté.

1. Soit F une surface algébrique sur laquelle il existe une involution I_n , d'ordre $n (> 2)$, doublement infinie, n'ayant qu'un nombre fini (éventuellement nul) de points unis.

Considérons, sur la surface F , un système continu complet, $\{C\}$, irréductible, satisfaisant aux conditions suivantes:

- a) Les points unis de I_n ne sont pas des points-base de $\{C\}$.
- b) Le système $\{C\}$ n'est composé ni avec I_n , ni avec une involution avec laquelle I_n serait elle-même composée.
- c) La dimension de chacun des systèmes linéaires $|C|$ contenus dans $\{C\}$ est au moins égale à un.

Il existe évidemment une infinité de systèmes de courbes satisfaisant à ces trois conditions. Il suffit, par exemple, de prendre un système simple, sans points-base, de dimension suffisamment grande.

En général, un groupe de I_n ayant un de ses points sur une courbe C générique, n'a pas un second point sur cette courbe. Il ne pourra y avoir exception que pour un nombre fini, α , de groupes de I_n ; ceux-ci auront deux de leurs points sur une courbe C générique.

La correspondance symétrique $(n-1, n-1)$, définie par I_n entre les points de F , transforme une courbe C en une courbe K . Chaque groupe de

(1) Loc. cit., (1), première partie, à partir du 6^{ème} alinéa de la pag. 334.

I_n , dont un point se trouve sur C , a $n - 1$ autres points sur K . Ces groupes de $n - 1$ points forment une γ'_{n-1} .

À un couple de points de C appartenant à un même groupe de I_n , correspondront $n - 2$ points doubles de K . Cette courbe K aura donc $(n - 2)\alpha$ points doubles (variables).

Lorsque C décrit le système $\{C\}$, K décrit un système continu ayant un certain nombre de points-base (aux points fondamentaux de I_n et aux conjugués, par rapport à I_n , des points-base éventuels de $\{C\}$) et $(n - 2)\alpha$ points doubles variables.

2. Supposons les courbes K irréductibles. Sous cette hypothèse, nous allons démontrer que les courbes K sont les courbes totales d'un système continu complet, plus ample que $\{C\}$.

Considérons un système linéaire complet $|C|$ de $\{C\}$. Les courbes K , homologues des courbes de C , forment un système rationnel non linéaire, puisque $n > 2$, et dont la dimension, égale à celle de C , est au moins égale à un d'après l'hypothèse e). D'après un théorème de M. Enriques (¹), ces courbes K appartiennent totalement à un système linéaire $|K|$, dont la dimension surpasse nécessairement celle de $|C|$. Observons, de plus, que la courbe générique du système $|K|$ n'a pas de points doubles variables (²), mais que K possède les mêmes points-base (avec les mêmes multiplicités) que le système rationnel formé par les courbes K homologues des courbes de $|C|$.

Lorsque C décrit le système continu $\{C\}$, le système $|K|$ décrit un système continu $\{K\}$ (que nous supposerons complété, s'il le faut) qui contient, comme courbe totale, toute courbe K homologue d'une courbe C et dont la dimension surpasse celle de $\{C\}$.

Si les courbes K sont irréductibles, elles sont les courbes totales d'un système continu complet $\{K\}$ dont la dimension surpasse celle de $\{C\}$ et dont la courbe générique n'a pas de points doubles variables.

3. Nous montrerons actuellement que les deux propriétés:

A) $\{K\}$ irréductible et (par suite) de dimension supérieure à celle de $\{C\}$,

B) $\{C\}$ n'ayant pas de points-base qui soient des points unis de I_n et (par suite) une courbe C ne contenant pas, en général, des points unis de I_n ,

sont incompatibles. On en déduira que les courbes K sont réductibles.

(¹) *Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche*. Rendiconti di Palermo (1896). vol. X, pag. 30.

(²) Voir Enriques, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* (n. 5). Memorie della Società dei XL (1896), ser. 3^a, vol. X, pag. 1.

Pour démontrer cette incompatibilité, nous utiliserons le raisonnement fait par MM. Enriques et Severi dans leur *Mémoire sur les surfaces hyper-elliptiques* ⁽¹⁾, en l'étendant un peu.

Considérons une courbe \overline{K} de $\{K\}$ qui ne soit pas la conjuguée d'une courbe de $\{C\}$, ce qui est possible en vertu de la propriété A). Soit L la courbe engendrée par les $n-1$ points des groupes de I_n dont le $n^{\text{ième}}$ point se trouve sur \overline{K} . Lorsque la courbe \overline{K} varie d'une façon continue dans le système $\{K\}$ de manière à se réduire à une courbe K_1 conjuguée d'une courbe C_1 de $\{C\}$, la courbe L se réduit à la courbe composée $(n-2)K_1 + C_1$. Observons que lorsque la courbe \overline{K} se sera réduite à K_1 , elle aura en général acquis certains points doubles: c'est-à-dire que la connexion de la surface de Riemann \overline{K} s'abaisse en se réduisant à K_1 .

Supposons la courbe L irréductible, et indiquons par x_1, x_2, \dots, x_n , les n points d'un groupe variable de I_n . Pour fixer les idées, supposons que x_2 soit le point situé sur \overline{K} , x_1, x_3, \dots, x_n , étant les $n-1$ points situés sur L .

Puisque la courbe L est irréductible, on peut faire décrire à x_2 , sur la courbe \overline{K} (envisagée comme surface de Riemann), un cycle $\overline{\sigma}$ tel que, sur L , x_1 et x_3 soient échangés entre eux. Lorsque \overline{K} se réduit à K_1 , un des points x_1, x_3, \dots, x_n , par exemple x_1 , se trouve sur C_1 , les $n-2$ autres étant sur K_1 . Mais cette réduction s'opérant d'une manière continue, la propriété de x_1, x_3 d'être échangés lorsque x_2 décrit un certain cycle sur \overline{K} , doit être conservée. Deux cas peuvent se présenter:

1) Le cycle $\overline{\sigma}$, décrit sur \overline{K} , devient, sur \overline{K}_1 , un cycle σ non homologue à zéro. Lorsque x_2 décrit σ , x_1 , qui se trouve sur C_1 , et x_3 , qui se trouve sur K_1 , doivent s'échanger. Cela ne peut se produire que si C_1 possède des points unis de I_n ⁽²⁾: ce qui n'a pas lieu en général, en vertu de la propriété B).

2) Le cycle $\overline{\sigma}$, décrit sur \overline{K} , se réduit, sur K_1 , à un point P . Ce point P est nécessairement un des points doubles que \overline{K} acquiert lorsque cette courbe se réduit à K_1 , c'est-à-dire, d'après la construction du système $\{K\}$, un des points doubles variables des courbes K homologues des courbes C . Le groupe de I_n comprenant P , possédera donc deux points P_1, P_2 , communs aux courbes C_1, K_1 . Or, si nous faisons décrire à x_2 sur la courbe K_1 (envisagée comme surface de Riemann) un cycle infiniment petit σ autour de P , x_1 , qui se trouve sur C_1 , et x_3 , qui se trouve sur K_1 , devront s'échanger. Cette échange ne pourra se faire qu'en l'un des points P_1 ou P_2 . Par conséquent, l'un de ces points sera un point uni de l'involution I_n . La courbe C_1 contiendrait donc un point uni de I_n , ce qui n'a pas lieu en général [propriété B)].

⁽¹⁾ Loc. cit. (5).

⁽²⁾ Loc. cit. (1), première partie, pag. 335.

Nous voyons donc que les propriétés A) et B) sont contradictoires si L est supposée irréductible. Il faut donc que L soit réductible de telle manière que l'on ne puisse pas faire décrire à x_2 , sur \bar{K} , un cycle tel que x_1 et x_3 soient échangés. Il faut donc que L contienne une partie X , lieu de x_1 se réduisant à C_1 lorsque \bar{K} se réduit à K_1 . Et cela est encore vrai même si l'involution I_n possède des points fondamentaux unis ⁽¹⁾.

La courbe X varie sur F d'une manière continue, et doit se réduire à une courbe de $\{C\}$. Mais ce système continu $\{C\}$ est complet: donc X appartient à ce système. La courbe X étant une courbe C , la courbe $L - X + \bar{K}$ doit être une courbe totale de $\{K\}$. Cela est absurde, car X n'étant qu'une partie de L , \bar{K} serait à la fois courbe partielle et courbe totale de $\{K\}$. Cette absurdité prouve que les propriétés A) B) sont incompatibles, que L soit réductible ou non. Les courbes K ne peuvent donc être irréductibles.

Les courbes K sont réductibles.

4. Supposons que les courbes K soient réductibles, mais en un nombre de courbes inférieur à $n - 1$. Alors, une de ces composantes, K' , sera le lieu de plusieurs points appartenant à un même groupe, variable, de I_n .

Dans ces conditions, on démontrera, en suivant le raisonnement fait plus haut, que le système $\{K'\}$, complet, comprenant les courbes K' comme courbes totales, a la dimension supérieure à celle de $\{C\}$. Le raisonnement de MM. Enriques et Severi, répété comme ci-dessus, conduira alors à une absurdité. Par conséquent:

Les courbes K se décomposent en $n - 1$ courbes.

5. Considérons un système linéaire $|C_i|$, triplement infini, contenu dans un système continu complet $\{C_i\}$ satisfaisant aux mêmes conditions que le système $\{C\}$ dont il a été question ci-dessus. Les courbes qui correspondent aux courbes C_1 au moyen de la correspondance $(n - 1, n - 1)$ déterminée sur F par I_n , se décomposent donc en $n - 1$ parties que nous désignerons par C_2, C_3, \dots, C_n .

Soient x_1, x_2, \dots, x_n les points d'un groupe générique de I_n qui ne sont ni l'un ni l'autre des points-base de $|C_i|$. Considérons les courbes de $|C_i|$ passant par le point x_1 . Elles forment un réseau que nous indiquerons par Σ_1 . Les courbes C_2, C_3, \dots, C_n , conjuguées des courbes C_1 de Σ , passent respectivement par les points x_2, x_3, \dots, x_n et engendrent des systèmes doublement infinis que nous désignerons par $\Sigma_2, \Sigma_3, \dots, \Sigma_n$.

Deux des systèmes $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ ne peuvent coïncider. En effet, cela ne pourrait se présenter que dans deux cas:

1) Σ_1 coïncide avec l'un des autres Σ , par exemple avec Σ_2 .

⁽¹⁾ Loc. cit. (1), première partie, pag. 336.

2) Deux systèmes Σ différents de Σ_1 , par exemple Σ_2 et Σ_3 , coïncident.

Dans le premier cas, les courbes de Σ_1 passeraient par le point x_2 , ce qui est impossible par construction.

Dans le deuxième cas, les courbes C_2 de Σ_2 passeraient par x_3 , et celles C_3 de Σ_3 par x_2 . Cela ne peut arriver pour un point x_1 générique, car alors, lorsque x_1 décrirait une courbe C_1 , les courbes C_2 , C_3 correspondantes coïncideraient, et, contrairement à ce qui a été démontré plus haut, les courbes transformées des C_1 au moyen de I_n ne se décomposeraient pas en $n - 1$ courbes.

Nous avons donc n systèmes doublement infinis *distincts*: $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$.

Considérons un groupe générique de I_n , et soit y_1 un point quelconque de ce groupe. Indiquons par H_1 le faisceau des courbes C_1 passant par y_1 .

Les courbes de Σ_2 , homologues des courbes C_1 de H_1 , passent par un certain point du groupe de I_n considéré. Nous indiquerons par y_2 ce point et par H_2 le système ∞^1 formé par les courbes C_2 homologues des courbes C_1 de H_1 . De la même manière, nous désignerons par y_3, y_4, \dots, y_n ; H_3, H_4, \dots, H_n les autres points et les autres systèmes ∞^1 homologues respectivement de y_1 dans le groupe de I_n considéré, et de H_1 dans les systèmes $\Sigma_3, \Sigma_4, \dots, \Sigma_n$.

Faisons décrire au point y_1 , sur la variété réelle V à quatre dimensions qui représente la surface F dans le sens de Riemann, un cycle quelconque. Les systèmes H_1, H_2, \dots, H_n varieront respectivement dans les systèmes *distincts* $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$, et, par suite, ne coïncideront jamais. Donc, après un chemin quelconque décrit par y_1 sur V , les systèmes H_1, H_2, \dots, H_n ne subissent aucun changement. Par suite, les points y_2, y_3, \dots, y_n dépendent rationnellement de y_1 . Notre théorème est ainsi complètement démontré.

Matematica — Teoremi di unicità nei problemi dei valori al contorno per le equazioni ellittiche e paraboliche. Nota di MAURO PICONE, presentata dal Socio L. BIANCHI.

1. Nel ristretto spazio che ho potuto concedere alla mia Nota recante lo stesso titolo della presente, inserita nel vol. XXII, pp. 275-282 (2° semestre 1913) di questi Rendiconti, non hanno trovato posto le applicazioni ad esempi concreti dei due teoremi di unicità enunciati alla fine della Nota stessa. In questi ultimi tempi mi si è dimostrata l'opportunità di far conoscere quelle applicazioni, in seguito a che, come mi fece osservare il professore Fubini, sarà soltanto resa palese tutta la portata di quei teoremi, presentemente abbastanza riposta. In questa breve Nota mi permetto appunto di mostrare le applicazioni sopradette. Si vedrà che, in forza dei citati teo-

remi, sarà possibile dare esempi, oltre i notissimi, di equazioni ellittiche lineari alle derivate parziali del second'ordine, per le quali vale il teorema di unicità relativo agli integrali che prendono valori assegnati sopra il contorno di un campo connesso che può illimitatamente estendersi come ad esso consente, per esempio, la sola condizione di essere tutto contenuto in un angolo (*).

Mi limito a considerare le equazioni ellittiche, per le quali, com'è noto, ogni teorema di unicità nei problemi dei valori al contorno è anche, sotto speciali ipotesi ulteriori per il relativo campo, un teorema d'esistenza; ma le considerazioni che farò, offrono anche altrettanti teoremi di unicità relativi agli integrali di un'equazione parabolica lineare alle derivate parziali del second'ordine, che prendono valori assegnati sopra il contorno di un campo connesso.

2. Sia data l'equazione ellittica

$$(I) \quad L(z) \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(b \frac{\partial z}{\partial x} + c \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \\ + 2h \frac{\partial z}{\partial x} + 2k \frac{\partial z}{\partial y} + Az = f,$$

per la quale supponiamo definiti i coefficienti in un certo campo Γ del piano x, y , tutto al finito, avente nel suo interno il punto origine delle coordinate, e le funzioni

$$a, b, c, \frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial y}, \frac{\partial c}{\partial y}, h, k, \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial k}{\partial y}, A, f,$$

finite e continue in tutto Γ , mentre ivi è sempre

$$a > 0, c > 0, ac - b^2 > 0.$$

Enunciamo il teorema di unicità, stabilito nella mia Nota citata, relativo agli integrali dell'equazione (I) assoggettati a prendere valori assegnati sopra il contorno c di un campo connesso C di Γ .

TEOREMA DI UNICITÀ. — Sia $\varphi(x, y)$ una funzione arbitraria definita in tutto Γ , ivi finita e continua colle sue derivate φ_x e φ_y , mentre la φ_y vi si mantiene sempre diversa da zero; poniamo

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \chi,$$

e indichiamo con θ una funzione sempre positiva in Γ , per la quale ivi risulti

$$(1) \quad a \geq \theta, \quad c \geq \theta \chi^2, \quad (a - \theta)(c - \theta \chi^2) - (b + \theta \chi)^2 \geq 0.$$

(*) I teoremi finora conseguiti in proposito, sono relativi a campi interamente contenuti entro una striscia, entro un quadrato, entro una corona circolare ecc.; cfr. il n. 3 della mia Nota citata.

Posto, inoltre,

$$t = -\theta x,$$

indichiamo con m il minimo della funzione

$$\alpha(x, y) = e^{\int_m^x \frac{\theta_x(s, y) + t_y(s, y)}{\theta(s, y)} ds},$$

e con M un numero positivo non inferiore al massimo dell'altra funzione

$$\beta(x, y) = \frac{1}{\theta} \left(A - \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial k}{\partial y} \right) e^{\int_0^x \frac{\theta_x(s, y) + t_y(s, y)}{\theta(s, y)} ds}.$$

Si ha allora che: dato un campo connesso C di Γ , se il primo e l'ultimo punto d'incontro di ogni curva $\varphi = \text{cost.}$ che invade C , col contorno c di C , limitano su questa un arco la cui proiezione ortogonale sopra l'asse x non supera la quantità

$$\delta = \pi \sqrt{\frac{m}{M}},$$

è unico in C l'integrale dell'equazione ellittica $L(z) = f$ che su c prende valori prescritti.

Per maggiore chiarezza, facciamo vedere come sia possibile, lasciando alla x completa arbitrarietà tra le funzioni finite e continue in Γ , costruire una funzione positiva θ ivi verificante le disegualianze (1). Basterà per ciò prendere per θ una funzione sempre positiva nel campo Γ e ivi sempre minore di entrambi i minimi delle due funzioni

$$a, \psi = \frac{ac - b^2}{ax^2 + 2bx + c},$$

certainemente non nulli nel campo Γ che abbiamo supposto finito.

Nell'ipotesi, che converrà in seguito considerare, in cui Γ si estende all'infinito, la funzione θ esisterà qualora si ammetta pei coefficienti a, b, c , quello speciale comportamento all'infinito, secondo il quale le due funzioni a e ψ si mantengono discoste da zero più di un termine assegnato σ . In quest'ipotesi, per Γ , non si potrà neppure assegnare arbitrariamente la funzione $\varphi(x, y)$ e i rimanenti coefficienti h, k, A ; si dovrà soddisfare alla condizione che la funzione $\alpha(x, y)$ si mantenga pur essa discosta dallo zero più di un termine assegnato m , e che la funzione $\beta(x, y)$ non superi un numero fisso M .

Dall'enunciato teorema di unicità segue che, nel caso che sia, in Γ ,

$$A - \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial k}{\partial y} \equiv H(x, y) \leq 0,$$

il campo C non deve soddisfare ad alcuna condizione affinché per esso valga il teorema; si potrà invero prendere allora per M una variabile positiva infinitesima. Ciò è notissimo; pertanto, nel sèguito, sottintenderemo che la funzione $H(x, y)$ prenda sempre, in Γ , anche valori positivi.

3. Ciò premesso, per una maggiore comprensione del teorema di unicità del numero precedente, consideriamo le sue conseguenze in qualche caso particolare. Cominciamo dal più interessante; e prendiamo per funzione φ la seguente:

$$y + \frac{x^2}{2k};$$

solchiamo cioè il campo Γ con la famiglia Φ di parabole eguali

$$y + \frac{x^2}{2k} = h,$$

di parametro k aventi l'asse delle y per comune asse. Si avrà $\chi = \frac{x}{k}$. Prendiamo per θ una costante positiva, minore di entrambi i minimi nel campo Γ (supposto finito) delle funzioni

$$a, \psi = \frac{k^2(ac - b^2)}{ay^2 + 2kbx + ck^2};$$

risulterà $\alpha(x, y) = 1$, $\beta(x, y) = \frac{H}{\theta}$. Designamo con N il massimo, in Γ , della funzione $H(x, y)$; in forza del nostro teorema di unicità potremo affermare che:

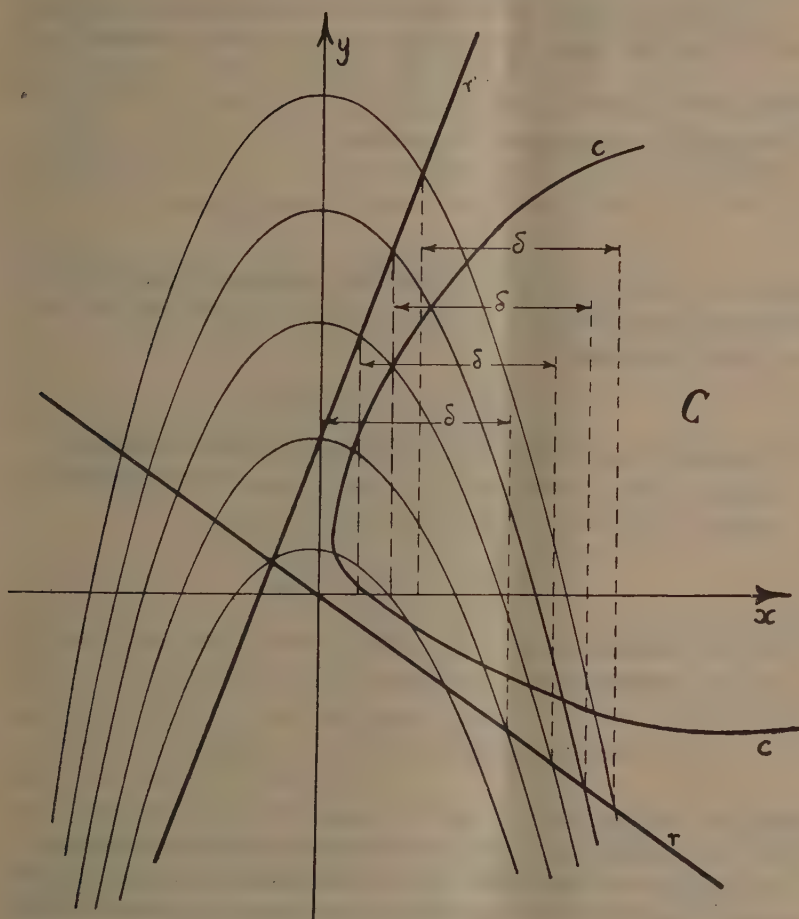
Dato un campo C di Γ , se il primo e l'ultimo punto di incontro di ogni parabola Φ che invade C , nel contorno c di C , limitano su questa un arco la cui proiezione ortogonale sull'asse x non supera la quantità $\delta = \pi \sqrt{\frac{\theta}{N}}$, è unico in C l'integrale dell'equazione (I) che su c prende valori prescritti.

È molto semplice la costruzione di campi C presentanti la particolarità indicata nel teorema precedente. A tal uopo (ved. figura) conduciamo la retta r per l'origine di equazione $y = \gamma x$, e consideriamo tutte le parabole Φ che la incontrano. Sopra ognuna di queste parabole fissiamo per senso positivo di percorso quello, secondo cui deve procedere un osservatore, che cammini sul piano x, y , percorrendo la parabola in guisa che il relativo fuoco giaccia sempre alla sua sinistra.

Se, dopo ciò, a partire da un punto d'incontro P_h di ogni parabola $\varphi = h$ della retta r , stacciamo sulla parabola, nel verso positivo, un segmento di essa, $P_h P'_h$, la cui proiezione ortogonale sull'asse x è misurata dalla costante δ , subito si vede che il luogo dei punti P'_h è una seconda

retta r' . Ed invero, detta ξ l'ascissa di P'_h , sarà $\xi + \delta$ quella di P_h ; e si avrà perciò:

$$r(\xi + \delta) = h - \frac{(\xi + \delta)^2}{2k}.$$



Ne segue, per l'ordinata η di P'_h , il valore

$$\eta = h - \frac{\xi^2}{2k} = h - \frac{(\xi + \delta)^2}{2k} + \frac{(\xi + \delta)^2}{2k} - \frac{\xi^2}{2k} = r(\xi + \delta) + \frac{\delta}{2k} (2\xi + \delta);$$

il luogo dei punti P'_h è pertanto la retta r' di equazione

$$y = \left(r + \frac{\delta}{k} \right) x + r\delta + \frac{\delta^2}{2k}.$$

Ne segue che: il campo C soddisferà alle volute condizioni per la validità del teorema di unicità, semplicemente se (ved. figura) è tutto contenuto in uno dei due angoli delle rette r, r' solcati dai segmenti di parabola $P_h P_h'$.

Il coefficiente angolare della retta r è in nostro arbitrio; scegliamolo perciò in guisa che i nominati due angoli opposti al vertice abbiano il loro massimo valore. Occorre e basta perciò porre $\gamma = -\frac{\delta}{2k}$; e allora le rette r e r' assumono rispettivamente le equazioni

$$(r) \quad y = -\frac{\delta}{2k} x, \quad (r') \quad y = \frac{\delta}{2k} x:$$

passano cioè entrambe pel punto origine delle coordinate, e riescono ugualmente inclinate sull'asse delle x . L'angolo da esse compreso sarà poi *acuto*, *retto*, *ottuso*, secondochè

$$\delta < 2k, \quad \delta = 2k, \quad \delta > 2k.$$

Possiamo pertanto enunciare il semplicissimo teorema di unicità:

Indichi k una costante positiva, e θ un'altra costante positiva minore di entrambi i minimi, in Γ , delle funzioni

$$a, \psi = \frac{k^2(ac - b^2)}{ax^2 + 2bkx + ck^2};$$

sia poi N il massimo, in Γ , della funzione $H(x, y)$: per ogni campo C di Γ , tutto contenuto in uno degli angoli delle due rette \bar{r}, \bar{r}' ,

$$(\bar{r}) \quad y = -\frac{\pi}{2k} \sqrt{\frac{\theta}{N}} x, \quad (\bar{r}') \quad y = \frac{\pi}{2k} \sqrt{\frac{\theta}{N}} x,$$

attraversati dall'asse delle x , vale il teorema di unicità relativo agli integrali dell'equazione (I) che prendono sul contorno valori prescritti.

Consideriamo il caso, particolarmente interessante, in cui il campo Γ sia tutto il piano xy , e i coefficienti dell'equazione (I) vi siano definiti in modo che esista sempre una costante positiva θ minore di entrambi i limiti inferiori, in tutto il piano, delle funzioni a e ψ , ed esista un numero positivo N che si mantenga maggiore dei valori di $H(x, y)$; varrà sempre allora il teorema di unicità per campi C soggetti, ad esempio, alla sola condizione d'essere contenuti in uno degli angoli delle rette \bar{r}, \bar{r}' , attraversati dall'asse delle x . Osserviamo che, fissato k e quindi θ , l'apertura dell'angolo (\bar{r}, \bar{r}') , in cui deve essere contenuto il campo C , dipende dai valori di N , ed essa aumenta e tende ad essere di 180° col diminuire del limite superiore N di $H(x, y)$. Comunque, purchè N sia finito, riusciamo

a costruire campi C , per cui vale il teorema di unicità, suscettibili di estendersi illimitatamente nelle infinite direzioni contenute in un angolo.

4. Confrontiamo le condizioni ora imposte al campo C con quelle che, anche nelle speciali ipotesi ultimamente fatte pei coefficienti dell'equazione (I), vengono ad esso imposte nei teoremi di unicità finora conseguiti.

Facciamo, per semplicità, il confronto avendo supposto $b \equiv 0$. È ben noto (cfr. il n. 3 della mia Nota citata), il teorema:

Se a e c sono funzioni sempre positive in tutto il piano aventi entrambe ivi limiti inferiori non nulli, e θ' designa una costante positiva minore di questi limiti, mentre N è un numero positivo che non viene mai superato da $H(x, y)$, per ogni campo C contenuto in una striscia di larghezza non superiore a $\pi \sqrt{\frac{\theta'}{N}}$, è unico l'integrale dell'equazione

$$(I') \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(c \frac{\partial z}{\partial y} \right) + 2h \frac{\partial z}{\partial x} + 2k \frac{\partial z}{\partial y} + Az = f,$$

che sul contorno di C prende valori prescritti.

Se a e c , oltre ad avere limiti inferiori non nulli, sono tali che anche la funzione

$$\psi = \frac{k^2 ac}{ax^2 + ck^2} = \frac{k^2}{\frac{x^2}{c} + \frac{k^2}{a}} > \frac{k^2}{\frac{x^2}{c} + \frac{k^2}{\theta'}},$$

ha limite inferiore non nullo, per il che occorre e basta che $\frac{x^2}{c}$ si mantenga inferiore ad un termine assegnabile [sia ad esempio $c = \theta' + x^2 c'(x, y)$, con $c'(x, y) \geq \sigma > 0$], si potrà anche applicare il teorema di unicità ottenuto al num. precedente; ed è evidente quanta maggiore libertà di estendersi esso consenta al campo C .

5. Il metodo seguito al n. 3, si può adottare, com'è ben evidente, nell'esame delle conseguenze del teorema di unicità enunciato al n. 2 in moltissime altre ipotesi che sulla funzione arbitraria $\varphi(x, y)$ si possono fare. Offre interesse la considerazione della famiglia Φ di catenarie

$$y + k \cosh \frac{x}{k} = h;$$

si avrà $\chi = \sinh \frac{x}{k}$, e se, nell'ipotesi che il campo Γ sia tutto il piano, supponiamo inoltre non nulli i limiti inferiori delle funzioni

$$a, \psi = \frac{ac - b^2}{a \sinh^2 \frac{x}{k} + 2b \sinh \frac{x}{k} + c},$$

e finito il limite superiore di H , si giunge per il campo C a condizioni ancora meno restrittive della sua libertà di estendersi illimitatamente in varie direzioni. Nelle ipotesi del n. 3, il coefficiente c dalla (I) deve avere all'infinito un tal comportamento da risultare il rapporto $\frac{x^2}{c}$ limitato superiormente, qui il coefficiente c deve invece crescere all'infinito dell'ordine (almeno) di un esponenziale, per modo che il rapporto $\sinh^2 \frac{x}{k} : c$ risulti limitato superiormente.

Considerando la famiglia Φ di cerchi concentrici

$$x^2 + y^2 = h^2,$$

bisognerà limitarsi a quella parte di Γ che è tutta al disopra della retta $y = \varepsilon$ (ε costante positiva), o tutta al disotto della retta $y = -\varepsilon$. Si ha $x = \frac{x}{y}$, per cui, se il campo Γ è tutto il piano e vogliamo applicare il nostro teorema di unicità a campi C situati ovunque nel semipiano $y \geq \varepsilon$, dobbiamo supporre che le funzioni

$$a, \psi = \frac{y^2(ac - b^2)}{ax^2 + 2bxy + cy^2},$$

abbiamo, per $y \geq \varepsilon$, limiti inferiori non nulli (ne seguirà il rapporto $x^2 : cy^2$ limitato superiormente). Sarà possibile allora la determinazione della costante positiva θ , e si avrà

$$\alpha = e^{\frac{x^2}{2y^2}}, \quad \beta = \frac{H}{\theta} e^{\frac{x^2}{2y^2}},$$

se dunque, inoltre, i rimanenti coefficienti h, k, A dell'equazione sono tali che il prodotto $He^{\frac{x^2}{2y^2}}$ non superi un numero positivo N , per un campo C del semipiano $y \geq \varepsilon$, il cui contorno stacchi su ogni cerchio Φ (che lo incontra) un arco di proiezione ortogonale sull'asse x non superiore alla quantità $\delta = \pi \sqrt{\frac{\theta}{N}}$, vale il teorema di unicità. Ne segue in particolare che: *Per ogni campo C tutto contenuto nella porzione dell'angolo retto $y \geq \varepsilon$, $x \geq -\frac{\delta^2 + \varepsilon^2}{2\delta}$, limitata dalla retta $y = \varepsilon$ e dalla parabola*

$$y^2 = 2\delta x + \delta^2 + \varepsilon^2,$$

vale il teorema di unicità.

Meccanica. — *Esperienze sulla elasticità a trazione del rame.*

Nota III di GUSTAVO COLONNETTI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Le ricerche sperimentali riferite nelle mie due precedenti Note su questo argomento ⁽¹⁾ mettono così chiaramente in evidenza l'analogia, d'altronde ben nota, che passa tra l'isteresi elastica e l'isteresi magnetica, che il lettore non avrà mancato di istituire spontaneamente un parallelo fra il concetto di deformazione permanente e quello di magnetizzazione residua.

Tale parallelo richiederebbe, per essere svolto a fondo, il tracciamento sperimentale di cicli bilaterali (cioè compresi fra limiti di forza di segni contrarii) che le nostre macchine per le prove dei materiali non permettono assolutamente di eseguire. Nei limiti puramente qualitativi che fin dal principio ho imposto alla mia indagine, il fenomeno può però essere approfondito nel modo seguente.

Uno dei soliti fili di rame, il quale, per un lungo periodo di tempo, aveva servito alle più svariate esperienze, rimanendone energicamente incrudito, venne, il 2 febbraio 1914, assoggettato ad un carico variabile gradualmente (in ragione di circa 50 kgr. al minuto primo), alternativamente in senso crescente e decrescente, fra i seguenti limiti:

1200 , 100 , 1000 , 300 , 800 , 500 , 600 kgr.

Un tale trattamento può facilmente concepirsi come risultante dalla sovrapposizione di un primo carico il quale, raggiunti i 600 kgr., si sia mantenuto costante durante tutto il resto dell'esperienza, e di un altro sforzo, che diremo, per intenderci, addizionale, il quale varii fra i seguenti valori:

+ 600 , — 500 , + 400 , — 300 , + 200 , — 100 , 0 kgr.

alternativamente positivi e negativi, e tali che la differenza tra il valore assoluto di uno qualunque di essi ed il valor assoluto del successivo sia una costante positiva.

Il comportamento del materiale si può rilevare così dalla tabella numerica allegata, come dal diagramma disegnato con tratto continuo nella parte sinistra della fig. 1; esso ha questo di interessante, che basta a caratterizzare completamente lo stato in cui il materiale si viene a trovare alla fine di questa prima fase (preparatoria) dell'esperienza, nel senso che le

⁽¹⁾ Presentate, per la pubblicazione in questi Rendiconti, nelle sedute del 1° e del 15 febbraio 1914.

leggi generali, che ho già avuto precedentemente occasione di enunciare (Nota II), bastano da sole a determinare in qual modo il materiale dovrà deformarsi al variare ulteriore del carico applicato. Ed invero, sia che detto carico prenda a crescere, sia che esso prenda a diminuire, debbono man mano chiudersi successivamente tanti cicli quanti durante le operazioni precedenti ne son rimasti di aperti: in altri termini, le due curve di deformazione che si possono descrivere facendo crescere lo sforzo addizionale fino a $+600$ kgr., ovvero facendolo decrescere fino a -600 kgr., debbono contenere tutti i

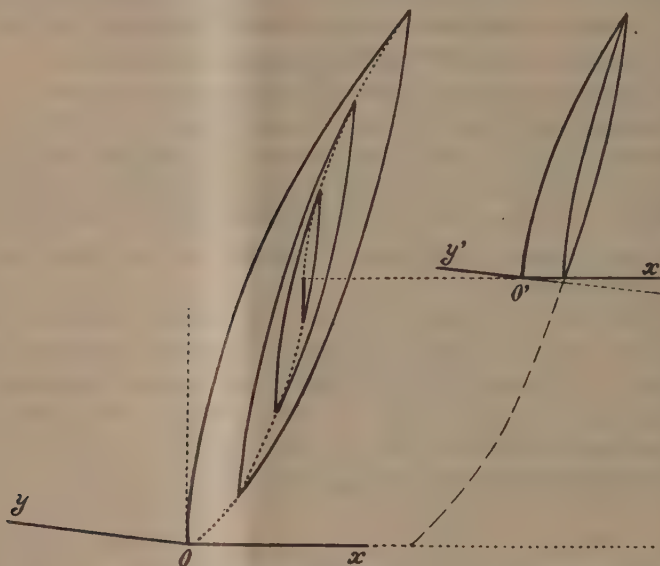


FIG. 1.

successivi punti di regresso corrispondenti rispettivamente ai massimi ovvero ai minimi valori che il carico ha toccati nelle trasformazioni suddescritte, epperò debbono necessariamente presentare l'andamento indicato mediante punteggiate nella figura.

L'esperienza, eseguita nel senso dei carichi crescenti, ha completamente confermato queste previsioni, fornendo valori della deformazione praticamente coincidenti con quelli osservati alla fine delle varie operazioni di carica realizzate durante il periodo preparatorio.

La curva di deformazione che così si ottiene non è più pertanto una delle solite curve limiti di un ciclo chiuso: essa presenta, a fronte di quelle, una curvatura assai più sentita, e ricorda, nel suo andamento generale, quella che abbiamo a suo tempo convenuto di chiamare la curva di prima deformazione. Nè è da credersi che si tratti soltanto di una semplice somiglianza di forma: si riscontra qui un vero e proprio rinnovarsi di quei medesimi

fenomeni che caratterizzano il comportamento del materiale quando esso vien cimentato per la prima volta. Il coppia ottenuto facendo variare lo sforzo addizionale da 600 kgr. a 0 e viceversa (riferito, nella parte destra della figura 1, ai due nuovi assi x' ed y' , la cui origine O' rappresenta lo stesso speciale stato di deformazione in cui il materiale si trovava alla fine della prima fase dell'esperienza), presenta infatti immutate tutte le caratteristiche dei processi di prima deformazione di cui ci siamo occupati nella Nota I, tanto per ciò che concerne l'esistenza delle deformazioni permanenti, quanto

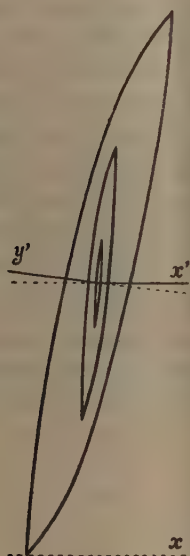


FIG. 2.

per ciò che riguarda l'intervento di quelle speciali modificazioni, nella deformabilità del materiale, che si sono allora denotate col nome generico di *incrudimento*.

Senonchè questo *incrudimento* ci si presenta questa volta completamente giustificato dallo specialissimo trattamento a cui il materiale è stato in precedenza assoggettato. Ed è poi facile constatare che la stessa deformazione permanente non è qui altro che una semplice manifestazione dei fenomeni di *isteresi*: se infatti si attribuiscono al carico addizionale valori negativi, la deformazione (intesa sempre contata a partire dallo stato in cui il materiale si trovava alla fine della fase preparatoria) si annulla ben presto ⁽¹⁾,

(¹) L'intensità della *forza coercitiva* non raggiunge, nel caso concreto, i 10 kgr.

poi diviene a sua volta negativa, raggiungendo una grandezza eguale a quella della massima deformazione positiva precisamente quando il carico addizionale diviene eguale a — 600 kgr. ⁽¹⁾.

Il comportamento del materiale che ha subito la preparazione dianzi descritta, per quanto in sostanza non differisca da quello che si riscontra nei saggi presi allo stato naturale, cessa pertanto di essere un fatto di eccezione, per rientrare nell'ambito delle leggi generali che regolano i processi di deformazione per cicli chiusi.

Alcune esperienze successive mi hanno permesso di riconoscere che la diversa velocità con cui le operazioni sopra descritte potevano venir realizzate, se influiva sull'entità numerica dei singoli risultati, non alterava però menomamente l'andamento generale dell'esperienza. A questo proposito mi sono sembrati particolarmente degni di essere qui ricordati alcuni cicli (fig. 2) presentanti tutti i caratteri della bilateralità, che io ho rilevati il 10 febbraio ultimo scorso operando nel solito modo sullo stesso spezzone, dopo di avergli fatte subire tutte le trasformazioni di cui consta la fase preparatoria con la massima velocità che la macchina permette di realizzare quando si rinuncia ad apprezzare le deformazioni, velocità che è di almeno 100 volte più grande di quella adottata nelle esperienze del 2 febbraio.

(¹) Riprendendo l'esperienza dal principio si verrebbe a realizzare, in un caso anche più generale, quel processo di eliminazione delle deformazioni per alternazioni decrescenti che il Cantone utilizzò sistematicamente nelle sue già citate ricerche.

GIORNO	ORA	Sforzo totale Kgr.	SPECCHIO SINISTRO		SPECCHIO DESTRO		Somma delle differenze parziali	Deformazione totale		Incremento della deform. riferito ad 1 kgr. di incremento dello sforzo
			Letture	Differenze parziali	Letture	Differenze parziali		(1)	(2)	
...
2 febbraio	9	0	834	—	1893	—	—	0		—
"		100	939	+ 105	2021	+ 128	+ 233	233		+ 2.33
"		200	1060	+ 121	2138	+ 117	+ 238	471		+ 2.38
"		400	1299	+ 239	2375	+ 237	+ 476	947		+ 2.38
"		600	1538	+ 239	2618	+ 243	+ 482	1429		+ 2.41
"		800	1779	+ 241	2867	+ 249	+ 490	1919		+ 2.45
"		1000	2025	+ 246	3119	+ 252	+ 498	2417		+ 2.49
"		1200	2272	+ 247	3371	+ 252	+ 499	2916		+ 2.50
"		1100	2154	— 118	3255	— 116	— 234	2682		— 2.34
"		900	1917	— 237	3015	— 240	— 477	2205		— 2.38
"		700	1682	— 235	2772	— 243	— 478	1727		— 2.39
"		500	1444	— 238	2529	— 243	— 481	1246		— 2.41
"		300	1204	— 240	2282	— 247	— 487	759		— 2.43
"		100	955	— 249	2033	— 249	— 498	261		— 2.49
"		200	1073	+ 118	2150	+ 117	+ 235	496		+ 2.35
"		400	1313	+ 240	2386	+ 236	+ 476	972		+ 2.38
"		600	1551	+ 238	2625	+ 239	+ 477	1449		+ 2.39
"		800	1790	+ 239	2870	+ 245	+ 484	1933		+ 2.42
"		1000	2029	+ 239	3119	+ 249	+ 488	2421		+ 2.44
"		900	1911	— 118	3001	— 118	— 236	2185		— 2.36
"		700	1679	— 232	2761	— 240	— 472	1713		— 2.36
"		500	1441	— 238	2520	— 241	— 479	1234		— 2.39
"		300	1200	— 241	2274	— 246	— 487	747		— 2.44
"		400	1318	+ 118	2390	+ 116	+ 234	981		+ 2.34
"		600	1554	+ 236	2630	+ 240	+ 476	1457		+ 2.38
"		800	1790	+ 236	2872	+ 242	+ 478	1935		+ 2.39
"		700	1674	— 116	2755	— 117	— 233	1702		— 2.33
"		500	1439	— 235	2516	— 239	— 474	1228		— 2.37
"		600	1557	+ 118	2632	+ 116	+ 234	1462	0	+ 2.34
"		700	1673	+ 116	2752	+ 120	+ 236	1693	236	+ 2.36
"		800	1791	+ 118	2873	+ 121	+ 239	1937	475	+ 2.39
"		1000	2029	+ 238	3118	+ 245	+ 483	2420	958	+ 2.41
"		1200	2275	+ 246	3367	+ 249	+ 495	2915	1453	+ 2.48
"		1100	2157	— 118	3250	— 117	— 235	2680	1218	— 2.35
"		1000	2040	— 117	3132	— 118	— 235	2445	983	— 2.35
"		800	1801	— 239	2891	— 241	— 480	1965	503	— 2.40
"		600	1564	— 237	2646	— 245	— 482	1483	21	— 2.41

(1) Contata a partire dall'inizio dell'esperienza. — (2) Riferita allo stato speciale in cui il materiale viene a trovarsi alla fine delle operazioni preparatorie descritte al principio di questa Nota.

GIORNO	ORA	Sforzo totale Kgr.	SPECCHIO SINISTRO		SPECCHIO DESTRO		Somma delle differenze parziali	Deformazione totale		Incremento della deform. riferito ad 1 kgr. di incremento dello sforzo
			Lecture	Differenze parziali	Lecture	Differenze parziali		(1)	(2)	
2 febbraio		700	1681	+ 117	2764	+ 118	+ 235	1718	256	+ 2.35
"		800	1798	+ 117	2885	+ 121	+ 238	1956	494	+ 2.38
"		1000	2038	+ 240	3125	+ 240	+ 480	2486	974	+ 2.40
"		1200	2277	+ 239	3367	+ 242	+ 481	2917	1455	+ 2.41
"		1100	2159	— 118	3251	— 116	— 234	2683	1221	— 2.34
"		1000	2040	— 119	3134	— 117	— 236	2447	985	— 2.36
"		800	1804	— 236	2890	— 244	— 480	1967	505	— 2.40
"		600	1566	— 238	2646	— 244	— 482	1485	23	— 2.41
"		400	1328	— 238	2401	— 245	— 483	1002	— 460	— 2.42
"		200	1085	— 243	2155	— 246	— 489	513	— 949	— 2.44
"		0	838	— 247	1909	— 246	— 493	20	— 1442	— 2.47
"	14	0	830	— 8	1903	— 6	— 14	6	— 1456	—
...
10 febbraio	15	600	1609	—	2640	—	—		0	—
"		700	1725	+ 116	2758	+ 118	+ 234		234	+ 2.34
"		600	1609	— 116	2641	— 117	— 233		1	— 2.33
"		500	1493	— 116	2521	— 120	— 236		— 235	— 2.36
"		600	1609	+ 116	2639	+ 118	+ 234		— 1	+ 2.34
"		700	1725	+ 116	2758	+ 119	+ 235		234	+ 2.35
"		800	1841	+ 116	2877	+ 119	+ 235		469	+ 2.35
"		900	1959	+ 118	2997	+ 120	+ 238		707	+ 2.38
"		800	1843	— 116	2880	— 117	— 233		474	— 2.33
"		600	1609	— 234	2644	— 236	— 470		4	— 2.35
"		400	1376	— 233	2404	— 240	— 473		— 469	— 2.37
"		300	1257	— 119	2284	— 120	— 239		— 708	— 2.39
"		400	1375	+ 118	2399	+ 115	+ 233		— 475	+ 2.33
"		600	1607	+ 232	2636	+ 237	+ 469		— 6	+ 2.34
"		800	1840	+ 233	2875	+ 239	+ 472		466	+ 2.36
"		900	1958	+ 118	2997	+ 122	+ 240		706	+ 2.40
"		1000	2077	+ 119	3118	+ 121	+ 240		946	+ 2.40
"		1200	2319	+ 242	3367	+ 249	+ 491		1437	+ 2.46
"		1100	2203	— 116	3249	— 118	— 234		1203	— 2.34
"		1000	2086	— 117	3130	— 119	— 236		967	— 2.36
"		800	1850	— 236	2892	— 238	— 474		493	— 2.37
"		600	1616	— 234	2650	— 242	— 476		17	— 2.38
"		400	1380	— 236	2408	— 242	— 478		— 461	— 2.39
"		200	1143	— 237	2165	— 243	— 480		— 941	— 2.40
"		0	899	— 244	1912	— 253	— 497		— 1438	— 2.48

GIORNO	ORA	Sforzo totale Kgr.	SPECCHIO SINISTRO		SPECCHIO DESTRO		Somma delle differenze parziali	Deformazione totale		Incremento della deform. riferito ad 1 kgr. di incremento dello sforzo
			Letture	Differenze parziali	Letture	Differenze parziali		(1)	(2)	
10 febbraio		100	1016	+ 117	2030	+ 118	+ 235	— 1203		+ 2.35
"		200	1135	+ 119	2147	+ 117	+ 236	— 967		+ 2.36
"		400	1371	+ 236	2383	+ 236	+ 472	— 495		+ 2.36
"		600	1606	+ 235	2622	+ 239	+ 474	— 21		+ 2.37
"		800	1843	+ 237	2865	+ 243	+ 480	459		+ 2.40
"		1000	2079	+ 236	3110	+ 245	+ 481	940		+ 2.41
"		1200	2324	+ 245	3360	+ 250	+ 495	1435		+ 2.47
...

Fisica. — *L'effetto Hall longitudinale nelle leghe ferromagnetiche di rame, manganese, alluminio* ⁽¹⁾. Nota di OTTAVIO BONAZZI, presentata dal Corrisp. A. BATTELLI.

1. È ben noto che la resistenza elettrica dei conduttori cambia quando essi vengono introdotti in un campo magnetico. Tale variazione è molto grande specialmente nel bismuto, e fornisce per questo un mezzo semplice e comodo per la misura dell'intensità di un campo: ma essa riesce sensibile pure, ed è stata misurata, per molti altri metalli, sia in direzione parallela, sia in direzione perpendicolare al campo magnetico.

La teoria elettronica sembra fornirci una facile spiegazione del fenomeno. Infatti le particelle cariche, cui si pensa dovuta la convezione della corrente, sotto l'azione di un campo longitudinale più non percorrono linee rette, ma eliche; e sotto l'azione di un campo trasversale debbono percorrere delle cicloidi. Nell'un caso e nell'altro le linee di corrente hanno entro il conduttore una lunghezza più grande: e ciò porta che la resistenza di questo deve risultare, in ogni caso, aumentata.

2. Ora, le esperienze eseguite coi vari metalli hanno concordemente rivelato un aumento di resistenza nella direzione *parallela* al campo magnetico.

Un risultato altrettanto semplice ed uniforme non si è invece avuto per le misure della variazione di resistenza in direzione *perpendicolare*, ossia

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di fisica dell'Università di Berlino, diretto dal prof. Rubens; completato nell'Istituto di fisica dell'Università di Pisa, diretto dal professore A. Battelli.

— secondo la denominazione di Nernst ⁽¹⁾ — per le misure dell'effetto Hall longitudinale. Infatti, mentre per molte sostanze (bismuto, cadmio, zinco, mercurio, carbone, argento, oro, rame, stagno, palladio, piombo, platino, tantalio) è stato trovato anche in questo caso *aumento* di resistenza (fig. 1) (potrebbe dirsi: *effetto Hall longitudinale positivo*), pei metalli ferromagnetici (ferro, acciaio, nichel, cobalto), risultò invece una *diminuzione* di resistenza (*effetto Hall longitudinale negativo*) già nelle ricerche di lord Kelvin del 1856 ⁽²⁾.

Ricerche ulteriori di altri sperimentatori hanno poi mostrato come possa talora ottenersi anche con metalli magnetici un aumento, usando campi sufficientemente deboli. Più precisamente, in certi campioni di ferro e nel nichel (fig. 2) l'effetto Hall longitudinale con campi deboli è positivo; va crescendo col campo fino ad un massimo, oltre il quale decresce e poi si annulla; con

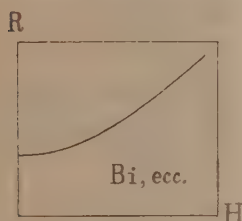


FIG. 1.

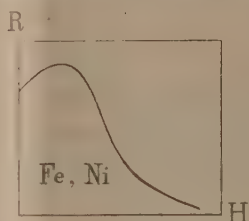


FIG. 2.

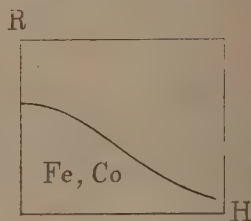


FIG. 3.

campi più intensi diventa negativo ⁽³⁾. Nel cobalto, e in altri campioni di ferro, si riscontra effetto negativo fin dalle prime misure coi campi più deboli (fig. 3).

La teoria elettronica — come ho accennato — offre diretta spiegazione del solo effetto Hall longitudinale positivo. Viene perciò spontaneo di pensare che l'*aumento* di resistenza sia in ogni caso il modo più genuino di presentarsi del fenomeno; e che il contegno caratteristico dei materiali magnetici sia da attribuirsi alla sovrapposizione di altri fenomeni — talora più intensi del primo e, quindi, capaci di mascherarlo — dipendenti dallo stato di magnetizzazione.

Questi risultati io ho dovuto qui riassumere, onde si possa ben comprendere lo scopo e la portata della ricerca da me eseguita sulle leghe di Heusler.

3. Delle leghe magnetiche composte di rame, manganese, alluminio, scoperte da Heusler, sono state studiate ormai quasi tutte le proprietà fisiche,

⁽¹⁾ Nernst, Ann. der Phys., 31, 783 (1887).

⁽²⁾ Thomson, Math. a. Phys. Pap., II, 307.

⁽³⁾ Grunmach, Ann. der Phys., 22, 141 (1907).

senza che però si sia potuto concludere in modo abbastanza sicuro sulla causa che provoca le proprietà ferromagnetiche nell'unione di quei tre metalli non ferromagnetici.

Particolarmente importante per tal proposito deve riuscire lo studio di alcune proprietà che sono intimamente connesse coi fenomeni magnetici: quali, ad esempio, l'effetto Joule, l'effetto Hall vero e proprio (trasversale), l'effetto termomagnetico, l'effetto Kerr, e l'effetto Hall longitudinale.

Orbene, di questi fenomeni, i primi quattro erano già studiati anche nelle leghe di Heusler, e si erano ottenuti i seguenti risultati:

1°) L'effetto Joule è in queste leghe inverso, ossia — essendosi sperimentato solo con campi abbastanza deboli (¹) — è quale si presenta pure nel ferro e nell'acciaio.

2°) Anche in riguardo all'effetto Hall trasversale ed all'effetto termomagnetico (²), le leghe di Heusler si comportano nettamente come gli altri materiali ferromagnetici.

3°) Sembrano invece discostarsene del tutto relativamente all'effetto Kerr (³), il quale in esse non si è potuto rivelare.

Io mi sono proposto di ricercare se le leghe in discorso si schierino, oppure no, col ferro, nichel, cobalto, in rispetto all'effetto Hall longitudinale, ossia in rispetto alla variazione di resistenza elettrica in un campo magnetico trasversale.

E qui riferisco i risultati da me ottenuti.

4. Data la grandissima difficoltà che offre la lavorazione meccanica di queste leghe, ho dovuto limitare la ricerca allo studio di un solo campione, scelto fra tanti come il meno fragile e il più duttile. La sua composizione centesimale, determinata coll'analisi chimica, era:

Cu 72 ; Mn 18 ; Al 10 .

Aveva proprietà magnetiche molto spiccate.

Dapprima coll'aiuto di una potente trafilatura, in seguito col lavoro a mano di un meccanico specialista, si potè ridurre la lega in forma di filo di *un decimo di millimetro* di diametro. Due pezzi di questo filo, lunghi circa 70 cm., furono accoppiati saldandoli insieme ad un estremo, e furono avvolti insieme a spirale piana, isolati fra loro, frapponendo tra le varie spire una strisciolina di carta (fig. 4). Il rocchettino così formato equivaleva dunque all'insieme di due spirali piane, unite in serie pel loro estremo centrale; ed

(¹) Austin, Verh. der. deut. phys. Ges., 6, 211 (1904).

(²) Zahn e Schmidt, Verh. d. deut. phys. Ges., 9, 98 (1907).

(³) Ingersoll, Phil. Mag., 11, 41 (1906).

il coefficiente d'induzione di un tal rocchettino per un campo magnetico trasversale (cioè in direzione dell'asse) era addirittura nullo.

Aveva una resistenza di ohm 109,962 a 10°.

5. Introdotto il rocchettino fra i poli di un elettromagnete, ne ho misurato la resistenza con eccitazioni del magnete gradatamente crescenti. In una prima serie di misure ho adoperato, per campi magnetici deboli, una elettrocalamita a due rocchetti verticali, con estremità polari piane, parallele; nella seconda serie di misure, per campi più intensi, ho usato un grosso elettromagnete tipo Weiss, con estremità polari a tronco di cono, del diametro estremo di 20 mm.



FIG. 4.

In un caso e nell'altro la distanza dei poli era di mm. 5; nell'interstizio fissavo il rocchettino di lega Heusler, col suo asse (lungo mm. 2) nella direzione delle linee di forza del campo.

Ambedue gli elettromagneti erano stati preventivamente campionati per quella data distanza fissa dei loro poli: era stata cioè determinata — mediante le variazioni di resistenza di una spirale di bismuto tarata, di Hartmann e Braun — l'intensità del campo magnetico pei varî valori dell'intensità di corrente eccitante.

Le misure di resistenza sono state eseguite col comune metodo del ponte di Wheatstone. La cifra dei centesimi di ohm venne determinata direttamente; quella dei millesimi fu calcolata per interpolazione dalle due deviazioni che si avevano nel galvanometro in senso opposto, aggiungendo o togliendo un centesimo di ohm.

Le misure con campi intensi dovettero esser fatte ad intervalli di parecchie ore l'una dall'altra, poichè il calore sviluppantesi nell'elettromagnete si propagava ben presto al rocchettino di lega Heusler e ne alterava notevolmente e rapidamente la resistenza in una misura difficile a computarsi. In tal modo però le determinazioni successive venivano fatte con temperatura dell'ambiente — e quindi anche della lega — sensibilmente diversa ogni volta: e perciò i risultati hanno dovuto poi esser ridotti tutti ad un'unica temperatura, che fu quella di 10°.

PRIMA SERIE DI MISURE.

Intensità del campo magnetico gauss	Resistenza della lega a 10° ohm	Intensità del campo magnetico gauss	Resistenza della lega a 10° ohm
0	109,962	1820	109,951
300	961	2920	940
720	960	3480	932
1000	959	4960	905
1470	958	5850	890

SECONDA SERIE DI MISURE.

Intensità di corrente nel- l'elettromagnete ampère	Intensità del campo magnetico gauss	Resistenza della lega a 10° ohm	Intensità di corrente nel- l'elettromagnete ampère	Intensità del campo magnetico gauss	Resistenza della lega a 10° ohm
0,8	6700	109,872	3,2	18810	109,561
0,9	7630	848	4,4	21140	503
1,1	9160	808	6,3	23590	459
1,2	9870	798	10,3	26760	410
1,4	11150	750	12,4	27770	393
1,7	12950	698	14,4	28500	380
2,0	14500	658	16,5	29080	375
2,5	16680	615	20,9	29940	364

6. I risultati delle due serie di misure sono riportati nelle due tabelle qui unite, e rappresentati nel grafico della figura 5.

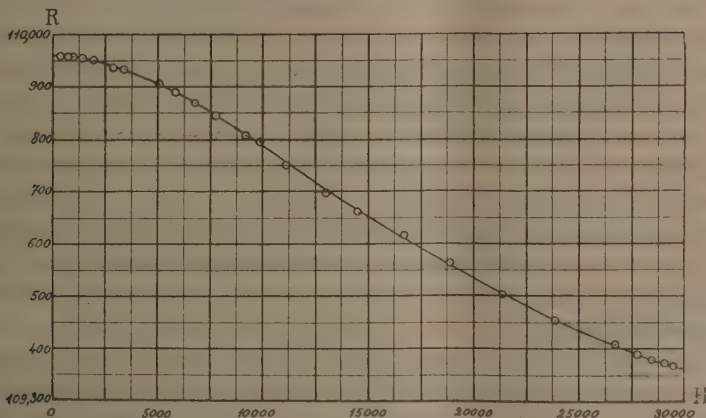


FIG. 5

Noi vediamo dunque che la lega in studio presenta una *diminuzione di resistenza*; diminuzione gradualmente maggiore per campi magnetici via via più intensi. Col campo massimo raggiunto nelle misure, di 30.000 gauss, la diminuzione di resistenza importa 0,6 ohm, corrispondente ad una diminuzione relativa di $5,4 \cdot 10^{-3}$.

Ora, poichè la diminuzione di resistenza per un campo magnetico trasversale, ossia l'effetto Hall longitudinale negativo, è — come ho ricordato prima — caratteristica dei materiali ferromagnetici, noi concludiamo così che anche in riguardo a questo fenomeno le leghe di Heusler possono classificarsi insieme colle altre sostanze ferromagnetiche. Più precisamente, essi si comportano, almeno in modo qualitativo, come il cobalto e come alcuni campioni di ferro.

Non rimane, così, che un solo fenomeno, l'effetto Kerr, che contraddistingue le leghe magnetiche di rame, manganese, alluminio, dagli altri materiali magnetici. Senonchè le esperienze in proposito sono state eseguite finora da un solo sperimentatore; onde, per la loro importanza, meriterebbero ulteriore conferma.

Fisica. — Intorno ad un condensatore sferico o conico per l'illuminazione laterale nei microscopii. Nota di G. GUGLIELMO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

I vari condensatori usati in microscopia per l'illuminazione laterale a fondo oscuro, sono costruiti per scopi e condizioni ben determinate e sono destinati principalmente ai medici e naturalisti, ed un fisico in molti casi non può giovarsene.

Dopo aver acquistato parecchi di questi condensatori ed aver trovato ostacolo al loro uso in questo inconveniente, ho cercato di costruirne in modo facile, usando sottili zone sferiche o coniche, tagliate da palloncini o da imbutini (scelti come i più regolari) ed inargentate all'esterno.

Essi erano certo imperfetti (ed inoltre, di solito, le condizioni teoriche d'illuminazione non erano che imperfettamente soddisfatte) però si prestavano a qualsiasi adattamento, dimodochè con un solo di essi ho ottenuto facilmente che fossero visibili così le particelle ultramicroscopiche del vetro rubino d'oro, come le particelle sospese ed in movimento browniano, nei liquidi e nei gaz, ciò che avrebbe richiesto tre diversi condensatori dei soliti e non pochi accessori.

È chiaro che i condensatori sferici (e specialmente quelli conici) non possono essere usati utilmente con luce parallela. Se ABCD è la sezione meridiana di una sottil zona sferica, i raggi paralleli all'asse, dopo riflessi dall'arco AB, si concentreranno in un breve arco di caustica molto lontano

dall'asse medesimo; lo stesso avverrà per i raggi rifless dall'arco CD e nelle altre sezioni meridiane, e s'otterrà così un anello intensamente illuminato attorno e fuori del campo del microscopio. Essi raggi s'incontrano poi sull'asse in una lineetta alta quanto la zona o più; saranno quindi illuminate molte parti che non si trovano alla distanza conveniente dall'obbiettivo, con diminuzione della luce utile e con produzione di luce diffusa nociva.

In generale, i raggi di luce provenienti da un punto sull'asse e riflessi dall'arco di circonferenza AB non potranno incontrarsi in un punto pure sull'asse. Perchè ciò avvenisse, dovrebbe l'arco di circonferenza poter essere assimilato ad un arco d'ellisse avente per fochi i suddetti due punti; ora ciò non è possibile neppure approssimativamente (ad eccezione del caso che la

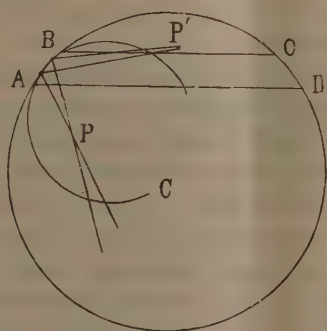


FIG. 1.

zona diventi una calotta), perchè i due archi non hanno lo stesso raggio di curvatura.

Se però si considera che i raggi emessi da un punto P' sull'asse, dopo riflessi sull'arco di circonferenza brevissimo AB, s'incontreranno approssimativamente in un punto P fuori dell'asse (o. più esattamente, in un breve arco di caustica), si vede che i raggi provenienti dal punto P. dopo riflessi possono concentrarsi reciprocamente in un punto P' sull'asse ed opportunamente situato.

Riferendosi al paragone dell'arco di circonferenza con quello d'ellisse, si ha che questa, se è soggetta alle condizioni di avere un foco in P' e di esser tangente all'arco di circonferenza, non è completamente determinata e potrà esser assoggettata alla condizione di avere un triplice punto di contatto coll'arco di circonferenza, e quindi lo stesso raggio di curvatura.

Facendo ruotare, la figura, di 360° attorno all'asse $P'C$, il punto P' rimarrà immobile, l'arco AB descriverà la zona sferica ed il punto P descriverà una circonferenza.

Si potrà dunque ottenere che i raggi riflessi dalla zona sferica, nelle varie sezioni meridiane, si incontrino in un punto dato sull'asse, usando come sorgente di luce una circonferenza o sottil anello di raggio determinato, a una distanza determinata, che emetta luce (utilmente) sotto un piccolo angolo in una direzione determinata.

È bensì vero, che ogni punto P di questa circonferenza emetterà anche raggi utili facenti un piccolo angolo colla sezione meridiana su cui esso punto si trova, e questi raggi non saranno concentrati in P' ; difatti la zona generata colla suddetta rotazione dell'arco AB di circonferenza o d'ellisse attorno all'asse CP' non può coincidere coll'ellissoide di rivoluzione avente per fochi P e P' , (la quale sola ha la proprietà di concentrare in P' i raggi emessi dal punto P), perchè questo ha per asse di rivoluzione PP' e non CP' , quindi i due elementi di superficie sferica ed ellissoide attorno ad AB hanno diverso uno dei raggi di curvatura.

Inoltre in pratica non si potrà avere una circonferenza luminosa di spessore nullo, ma invece una fessura circolare che, per quanto sottile, sarà decomponibile in una infinità di anelli concentrici, di spessore infinitesimo, a ciascuno dei quali corrisponderà un diverso punto di concentrazione dei raggi, approssimativamente sull'asse.

In conclusione, i raggi provenienti dalla fessura circolare, per le suddette ragioni, saranno concentrati, invece che in un punto, in uno spazio di piccolissimo diametro e spessore, quest'ultimo tanto minore (finchè la diffrazione è trascurabile) quanto più sottile è la fessura. Siccome, diminuendo lo spessore di questa, si diminuirebbe altresì la quantità di luce che serve per l'illuminazione, sarà utile che la fessura sia di grande diametro e corrispondente spessore, e che di essa si produca una immagine impiccolita, avente il diametro e la posizione e l'inclinazione dei raggi, opportuni.

Il punto P' ove si concentrano i raggi dovrà trovarsi sulla base superiore della zona, un po' al disopra; oppure anche, quando l'obiettivo del microscopio abbia una sufficiente distanza frontale, un po' al disotto; la zona dovrà esser tagliata ad una distanza di circa 45° dalla sezione equatoriale cui è parallela.

Stabilita la posizione del punto P' ove (o attorno al quale) si vogliono concentrati i raggi riflessi dalla zona, per trovare la posizione e il diametro della fessura circolare o della sua immagine e la direzione dei raggi incidenti, ho disegnato sulla carta, in scala ingrandita, la sezione meridiana $ABCD$ della zona, di cui avevo misurato i diametri e la distanza delle basi; ho trovato il centro C della circonferenza di cui $ABCD$ fa parte, ed ho segnato il punto P' .

Condotto pel punto medio M d'incidenza il raggio riflesso $P'M$, ho tracciato il raggio incidente PM che dà la direzione media di questi raggi; e

per trovare la pozione del punto P immagine di P', mi son servito della formula $1/p + 1/p' = 2/R \cos i = 1/f$.

Se sopra MC come diametro, si descrive una circonferenza, essa taglia su P'M e su PM corde uguali di lunghezza $R \cos i$, la cui metà è la distanza focale principale f per l'angolo di coincidenza i . Segnando il punto di coordinate cartesiane f, f' e, per questo punto tracciando una retta che tagli sopra uno degli assi a partir dall'origine un segmento uguale a P'M, il segmento tagliato sull'altro asse avrà la lunghezza cercata PM, in conformità d'un noto procedimento facilmente dimostrabile. Le distanze del punto P dalla base maggiore della zona e dall'asse danno la pozione ed il raggio della fessura.

A riguardo della direzione dei raggi incidenti, ossia della loro inclinazione media sull'asse della zona, conviene notare che questa inclinazione è nulla se la sorgente di luce è una fessura circolare direttamente illuminata dai raggi solari; mentre, se di questa fessura si produce un'immagine con una lente convergente, l'inclinazione media sull'asse dei raggi partenti da questa fessura avrà per tangente il raggio della fessura diviso per la distanza focale della lente, e quindi una sola di queste due lunghezze può esser scelta arbitrariamente, quando si vuole ottenere una determinata inclinazione.

L'andamento dei raggi riflessi dall'arco AB, la loro concentrazione in P', la più opportuna altezza della zona riflettente, meglio che colle formule risultano se si costruiscono le caustiche per riflessione del punto P' o del punto P prodotte dall'arco AB.

A tale scopo ho costruito un semplice strumento costituito da un parallelogrammo articolato insieme con una delle diagonali; questa ruota attorno ad un pernio infisso in C e descrive con una sua estremità l'arco AB, ed i due lati adiacenti rappresentano i due raggi luminosi incidente e riflesso. Una scanalatura nel regolo diagonale lascia scorrere il pernio del vertice opposto a quello che descrive l'arco AB; un'altra scanalatura nel regolo che rappresenta il raggio incidente, fa sì che esso possa scorrere sopra un pernio fisso, che rappresenta il punto luminoso. Tracciando parecchi raggi riflessi successivi, risulta la caustica voluta.

Il ragionamento col quale si stabiliscono le condizioni in cui deve funzionare il condensatore conico, è quello stesso che valse per il condensatore sferico.

Sia ABCD la sezione meridiana di una zona tagliata perpendicolarmente all'asse di un cono retto a base circolare che si suppone riflettente, e si voglia che i raggi riflessi dalla zona si concentrino in un punto P' sull'asse. Se consideriamo invece P' come punto luminoso, i raggi che esso emette riflettendosi su AB produrranno in P un'immagine virtuale; ed i raggi che, andando in senso inverso, formerebbero in P un'immagine reale, riflettendosi

su AB la formeranno in P'. Facendo ruotare la figura attorno all'asse, P' rimane immobile, AB descrive la zona conica e P descrive una circonferenza.

Se dunque si usa come sorgente di luce una fessura circolare, e di questa, mediante una lente, si produce una immagine avente il diametro e la posizione della suddetta circonferenza, con raggi aventi la debita inclinazione sull'asse, questi, riflettendosi sulla zona, saranno concentrati in P'. Anche in questo caso si sono trascurati i raggi obliqui rispetto alle sezioni meridiane che impediranno la rigorosa concentrazione dei raggi in un punto.

Venendo a qualche particolare di costruzione e di uso di questi condensatori, dirò che quello sferico, che ho quasi sempre usato, era stato tagliato da un palloncino di circa 4 cm. di diametro, dalla parte del collo perchè ivi il vetro era più regolare; era alto 8 mm. e le sue pareti facevano a

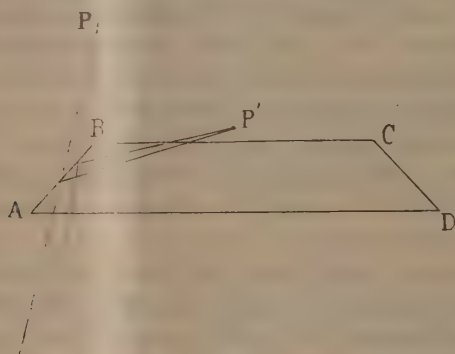


FIG 2.

metà altezza un angolo coll'asse di circa 40°; era stato inargentato e verniciato nel modo solito ed incollato colla base inferiore più larga sopra un disco di vetro da specchi, in mezzo al quale incollai un disco di carta nera di diametro un po' maggiore di quello della base superiore della zona.

Prima che mi fossi reso ben conto delle condizioni teoriche necessarie per ottenere il miglior concentramento dei raggi riflessi, collocai questo condensatore sul piano portaoggetti, avente un foro di circa 4 cm. di diametro d'un sostegno III Zeiss da microscopî, dal quale avevo tolto il condensatore d'Abbe. Facendovi arrivare luce parallela e con un dischetto di carta sottile, constatai che i raggi riflessi producevano su questo un anello brillantissimo e sottile, lasciando però nell'oscurità la parte centrale; questa si restringeva bensì fino a scomparire se sollevavo il disco di carta, ma lo spazio illuminato diveniva molto esteso, sfumato e meno brillante.

Per ottenere che i raggi riflessi fossero meno convergenti, cosicchè il loro punto d'incontro venisse a trovarsi sull'asse della zona, resi divergenti i raggi incidenti collocando al posto del condensatore d'Abbe una lente negativa (la lente di *flint* d'un obbiettivo di binocolo da teatro) scelta per

tentativi in modo d'ottenere l'effetto voluto. Questa disposizione empirica, teoricamente non ottima, è molto semplice e di facile uso. Altri tentativi ho fatto con vario risultato, facendo cadere i raggi riflessi dalla zona sopra una lente emi sferica, colla base in alto. Più opportuno sarebbe stato un disco di vetro con superficie o contorno torico.

In seguito cercai d'avvicinarmi, il meglio che mi fosse possibile, alle condizioni teoriche, e trovai graficamente, nel modo già detto, che la sorgente circolare di luce doveva essere 9 mm. distante dalla base inferiore della zona; e perciò incollai questa sopra un disco di vetro, spesso appunto 9 mm. e sulla faccia inferiore di questo incollai un disco di carta nera di diametro un po' minore di quello teorico. Il condensatore così formato collocai sul piano portaoggetti suddetto; vi produssi sulla faccia inferiore, mediante una lente convergente e giovandomi dello specchio piano del microscopio, l'immagine d'una fessura circolare attraversata dai raggi solari.

Questa era ottenuta col foro a vite, di 10 cm. di diametro, del portalucente, in cui avvitavo un disco d'ottone di 98 mm. di diametro con tre piccole sporgenze simmetriche che entravano nel cavo della vite. La lente convergente deve necessariamente avere un diametro uguale o maggiore di quello della fessura, e, se non fosse acromatica, produrrebbe un'immagine di questa quasi interamente decomposta nei varî colori dello spettro e, perciò, larga e meno brillante.

Feci uso perciò di una doppia lente (da lettura) di 12 cm. di diametro che resi acromatica incollandola sull'armatura e riempiendo l'intervallo di Xilolo reso un po' più dispersivo coll'aggiunta di poco solfuro di carbonio.

Cercai, in seguito, d'ottenere le condizioni migliori d'illuminazione, non più seguendo la teoria ma per tentativi, collocando cioè sul piano portaoggetti prima un foglio di carta e producendovi un'immagine molto brillante della fessura e del voluto diametro e poi sostituendo alla carta il condensatore e cercando d'ottenere sul dischetto di carta sovrapposto un cerchietto molto ristretto e molto brillante.

L'osservazione delle particelle d'oro nel vetro rubino non presenta difficoltà. Occorre staccare anzitutto dal vetro portaoggetti, mediante un leggero riscaldamento, il prismetto rettangolare, che viene fornito dalla Casa Zeiss; però, se esso venisse collocato lungo l'asse del condensatore, e illuminato, non sarebbe possibile di veder altro che un'intensa luce verde, perchè lo strato illuminato è troppo spesso. Per evitar ciò e rendere visibili le singole particelle d'oro, ho ricoperto interamente di vernice nera le faccie laterali del prismetto, e con una punta sottile d'ago (o con un bulino) ad $\frac{1}{3}$ di millimetro dalla sommità vi ho tracciato tutt'attorno una sottile linea che mettesse a nudo il vetro. Collocando il prismetto nel mezzo del condensatore in modo che i raggi riflessi cadessero su questa linea, le singole particelle riuscirono facilmente visibili con varî ingrandimenti. Ottenni facilmente lo

stesso scopo anche nel modo solito, producendo nel prismetto scoperto l'immagine d'una fessura lontana 3 metri, mediante un obbiettivo fotografico di 32 mm. di diametro e 21 cm. di distanza focale.

Per osservare le particelle di fumo sospese ed in vivo movimento browniano (osservabile anche con mediocre ingrandimento), ho adattato sul condensatore un coperchio d'ottone con un foro centrale chiuso da un vetrino coprioggetti e munito di due tubetti, uno per l'ingresso, l'altro per l'uscita del fumo, p. es., di tabacco, che deve però esser pochissimo denso. Per evitare la luce diffusa da tutte le particelle che non sono nel campo del microscopio o alla conveniente distanza, il fondo del campo del microscopio era formato da un foro in una scatola d'ottone colle pareti annerite, dimodochè lo strato occupato dal fumo, e illuminato, era molto sottile.

Però, a causa della vastità dello spazio occupato dal fumo, in questo si formavano correnti, dimodochè le particelle, oltre al movimento browniano, avevano un movimento comune di traslazione.

Per evitare ciò, ho anche fatto entrare il fumo in un tubetto di vetro, cilindrico, colle pareti verticali, chiuso superiormente da un vetrino coprioggetti e collocato nell'interno del condensatore.

Per l'osservazione delle particelle sospese nei gaz sarebbe utile che i raggi riflessi del condensatore fossero orizzontali o anche (se non si richiede un forte ingrandimento e, quindi, una grande distanza frontale) diretti verso il basso, perchè quelli diretti verso l'alto attraversano il vetrino coprioggetti e cadendo sull'armatura dell'obbiettivo, producono facilmente una diffusa e nociva illuminazione del campo.

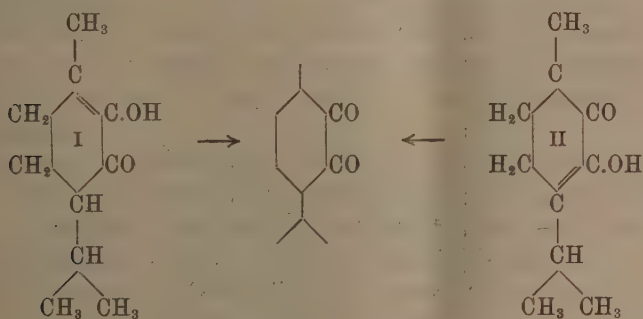
Finalmente per l'osservazione delle particelle colloidali in sospensione nei liquidi ho riempito completamente il condensatore di un liquido che non sciogliesse la colla delle congiunzioni, petrolio, xilolo o anche, per breve tempo, acqua distillata. In questi casi non sarebbe necessario che la zona fosse inargentata, perchè vi si produrrebbe riflessione totale; (il condensatore sferico o conico potrebbe essere di vetro massiccio). Ricoprii il condensatore col suo coperchio con foro centrale chiuso da un vetrino coprioggetti; su questo collocai una goccia del liquido da osservare e, su questa, un secondo vetrino coprioggetti (impedivo che i due venissero a contatto, collocandovi presso l'orlo tre pezzetti di stagnola sottile o mica o foglia d'oro). L'osservazione si faceva nel modo solito, con un obbiettivo a secco.

Anche col suddetto condensatore, a causa della intensa illuminazione che esso produce, è utile di sostituire lamine di quarzo ai vetrini coprioggetti.

Un anello molto luminoso (i cui raggi sono concentrati approssimativamente in un punto dal condensatore sferico) può ottenersi facendo riflettere i raggi solari, resi convergenti da una lente, sopra un tubetto di vetro inargentato di 1 o 2 cm. di diametro, coassiale colla lente e collocato presso al foco.

Chimica-fisica. — *Sullo spettro d'assorbimento ultravioletto della Buccocanfora* ⁽¹⁾. Nota di MARIO MAYER, presentata dal Corrispondente A. GARBASSO.

La buccocanfora, chetone idroaromatico che si estrae dalle foglie del Bucco (*Barosma cretata*, fam. *Rutaceae*), ha la costituzione corrispondente alla formola I



ossia quella di un 6-ossimenten-5-one, com'è stato già dal 1906 dimostrato da Semmler e Mc Kenzie, e recentemente anche dal Cusmano ⁽²⁾. Allo scopo di spiegare un comportamento anomalo di questa sostanza, e precisamente la sua inattività ottica, che non si accorda con la assimetria molecolare di detto composto, è stata invocata da Cusmano e Poccianti ⁽³⁾ la possibilità della coesistenza, in soluzione, del composto corrispondente alla formola I con un altro isomero, la cui struttura sarebbe data dalla formola II.

L'investigazione spettrochimica delle soluzioni alcoliche della buccocanfora sintetica, che è racemica come lo è la naturale, ha reso anche probabile questa ipotesi, inquantochè la presenza di una banda di assorbimento nello spettro ultravioletto estremo, propria di questa sostanza, rende facile l'ammettere in questo caso, come in consimili conosciutissimi nella letteratura sull'argomento ⁽⁴⁾ un equilibrio in soluzione fra due forme isomere corrispondentemente a due composti di formole I e II.

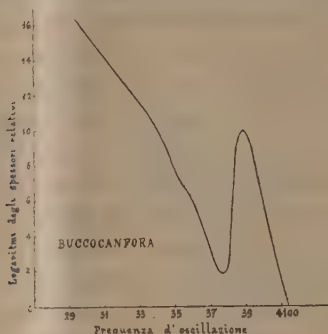
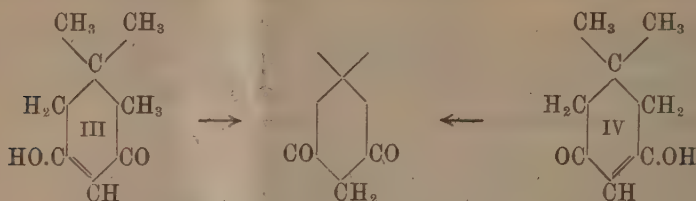
⁽¹⁾ Lavoro eseguito nello Stabilimento fotomeccanico e fotochimico dell'ing. A. Ali-nari di Firenze.

⁽²⁾ Semmler e Mc Kenzie, Ber., 39, 1158 (1906); Cusmano, questi Rendiconti, 22 (5) II, 569 (1913).

⁽³⁾ Questi Rendiconti, 23 (5) I, 347 (1914).

⁽⁴⁾ Smiles, *Relation between Chem. constit. and. phys. properties*, London, 1910 pag. 389 e segg.

Recentemente anche Gilling⁽¹⁾, studiando la dimetiltetraidroresorcina ha ottenuto un chetolcool III il cui comportamento spettrochimico fa am-



mettere, nelle soluzioni di questo composto, un equilibrio fra le forme isomere rappresentate in struttura dalle formole III e IV. Il Gilling non ha pubblicato però ancora i risultati numerici delle sue ricerche spettrochimiche. I nostri, che hanno servito alla costruzione della curva qui annessa alla presente Nota, potrebbero condurre anche ad un'altra interpretazione. La banda persistente situata fra 3700 e 3800 di ascissa corrisponde ad una delle curve del benzene (Smiles, loc. cit., pag. 391); quindi non si può con sicurezza affermare che essa sia *esclusivamente* dovuta all'equilibrio molecolare al quale è stato accennato più sopra.

Accennerò qui brevemente alla tecnica sperimentale seguita in questa ricerca, tecnica che non differisce molto da quella comunemente usata con tanto successo dalla scuola inglese.

Spettrografo. — Lo spettrografo usato fu costruito dalla ditta Steinheil di Monaco; agisce mediante tre prismi di quarzo. L'immagine dello spettro viene fotografata in una camera fotografica del formato di cm. 13 × 18, e munita di dispositivo per eseguire quattro fotografie in serie sulla medesima lastra sensibile.

Sorgente luminosa. — Si adoperò una lampada ad arco alimentata dalla corrente stradale continua a 150 volt, convenientemente abbassata da

(¹) Trans. Chem. Soc. London, 103, 2030, dec. 1913.

una resistenza adatta. Il polo positivo era costituito da una bacchetta di carbone ordinario da lampada imbevuta di cloruro ferrico e poi arroventata alla soffieria come consiglia il Piutti⁽¹⁾. Per polo negativo servì un cilindretto di ferro di diametro uguale alla bacchetta di carbone. I due poli formavano fra di loro un angolo di circa 100°.

Materiale fotografico. — Dovendo eseguire fotografie solamente per lo studio della regione violetta ed ultravioletta dello spettro, si usarono comuni lastre di media sensibilità, e precisamente quelle etichetta verde di M. Cappelli. Lo sviluppo fu eseguito con il metolo idrochinone in soluzione alcalina.

La luce dell'arco, funzionante a circa 10 amp., era sufficiente per eseguire delle pose cortissime, come 5 minuti secondi per lo spettro di confronto del ferro, e 15 secondi in media per le fotografie eseguite intercalando fra la fenditura e l'arco lo strato di 60 mill. di soluzione alcoolica di buccocanfora.

Soluzioni. — Queste furono racchiuse nel tubo a spessore variabile di Baly e Desch⁽²⁾ con finestre di quarzo⁽¹⁾ di un centimetro di diametro circa. Le finestrine furono masticiate al tubo di vetro, lungo circa 8 cm., mediante soluzione di colla di pesce in acido acetico glaciale.

Per lo studio spettrochimico della buccocanfora servì una soluzione N/4 della sostanza (corrispondente alla soluzione satura del composto in alcool alla temperatura di 15°, ossia gr. 4,2 per 100), ed un'altra 10 volte più diluita, ossia N/40.

Furono fotografati gli assorbimenti corrispondenti ai seguenti spessori di strato di soluzione:

N/4 60 mill.—40—20—10

N/40 60—40—20—5.

I limiti della banda d'assorbimento e quelli dell'assorbimento generale nell'ultravioletto estremo furono stabiliti in base al confronto con un arco campione di emissione, preventivamente studiato, della sorgente luminosa impiegata.

Rappresentazione grafica. — Il grafico qui annesso è stato costruito prendendo come ascisse le inverse delle lunghezze d'onda, ossia le frequenze di oscillazione e come ordinate, non i logaritmi dei millimetri di strato di cui era stato fotografato l'assorbimento, ma i logaritmi degli *spessori relativi*. Questi si ottengono dividendo il numero dei millimetri degli strati fotografati per quello dell'ultimo strato — che non presenta più assorbi-

⁽¹⁾ Questi Rendiconti, (5), 22, II, 195 (1913).

⁽²⁾ Trans. Chem. Soc. London, 85, 1039 (1904).

⁽³⁾ Ringrazio qui la ditta Carl Zeiss di Jena che mi ha fornito le due laminette di quarzo necessarie.

mento — su cui si sperimenta: nel nostro caso quindi 5 mill. di soluzione N/40.

L'esame del grafico rivela appunto la presenza di una banda di assorbimento il cui massimo coincide colla frequenza 3750, ossia la lunghezza d'onda $268\mu\mu$, oltre al solito assorbimento dell'ultravioletto estremo che presentano una grandissima quantità di sostanze organiche incolori.

Se questa banda si deve attribuire *solamente* alla presenza del nucleo benzenico, il risultato sperimentale al quale si giunge non è meno interessante. La buccocanfora è ancora un fenolo: derivato quindi del benzene. Il suo comportamento chimico è quello di un fenolo: forse allora la banda notata ci esprime appunto la presenza di ancora un *frammento attivo* del nucleo benzenico nella molecola.

Ad ogni modo queste osservazioni intorno al comportarsi chimico-fisico di questo singolare composto, oggetto di questa Nota, sono, a parer mio, di una certa importanza. Infatti ci mettono, fra l'altro, in guardia contro possibili interpretazioni unilaterali ⁽¹⁾, e ci avvertono che qualche volta non si può concludere, col solo esame spettroscopico, nulla di preciso intorno alla costituzione di certi composti.

Chimica-fisica. — *Sullo spettro d'assorbimento delle soluzioni alcooliche di santonina e di suoi derivati in presenza di alcali* ⁽²⁾. Nota di M. MAYER, presentata dal Corrisp. A. GARBASSO.

1. Oggetto della presente Nota è lo studio spettrochimico della colorazione rosso-violacea che danno le soluzioni alcooliche di santonina in presenza di potassa caustica, nonché di quella verde che dà la diidrosantonina nelle medesime condizioni ⁽³⁾ e di una simile presentata dalle ossisantonine ⁽⁴⁾ in soluzione alcoolica addizionata di etilato sodico.

La tecnica sperimentale seguita per lo studio spettroscopico di tali reazioni è identica a quella descritta da me in un'altra Nota, pubblicata in questi Rendiconti ⁽⁵⁾, alla quale rimando per i particolari e per la interpretazione delle curve tracciate. Solamente, furono usate lastre sensibili Cappelli etichetta verde, ortocromatizzate in un bagno di pinacromo all'1 ‰. Questa sensibilizzazione è più che sufficiente per poter fotografare tutto lo spettro

⁽¹⁾ Cfr. Knorr, Lieb. Ann., 306, 85 (1898).

⁽²⁾ Lavoro eseguito nello Stabilimento fotomeccanico e fotochimico dell'ingegnere A. Alinari in Firenze.

⁽³⁾ Cusmano, questi Rendiconti (5), 22, I, 507 (1903).

⁽⁴⁾ Id., Rend. Soc. chim. ital., 1914, pag. 1.

⁽⁵⁾ Anno 1914 (5), 23, I, pag. 439.

nell'aranciato e anche un po' nel rosso; quindi bastante al mio scopo. Le pose date furono, di necessità, un po' più lunghe di quelle per lastre ordinarie, ma non oltrepassarono mai i 45 minuti secondi.

2. Le soluzioni adoperate per lo studio spettrochimico dei su citati composti furono le seguenti:

a) Santonina incolora: N/20 e N/100 in alcool; rispettivamente gr. 1,33 e 0,246 per 100.

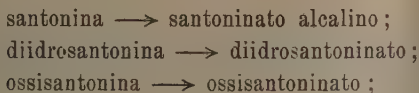
b) Diidrosantonina: N/500 e N/2500 in alcool; rispettivamente gr. 0,0496 e 0,0099 per 100.

c) Ossisantonine fusibili a 156° e a 212°: N/50 e N/500 in alcool; rispettivamente gr. 0,525 e 0,0525 per 100.

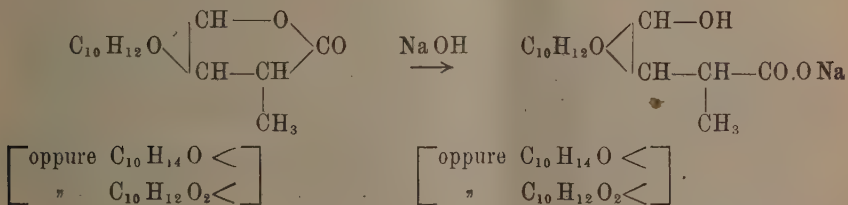
Tutte queste soluzioni sono perfettamente incolore e, a parte quelle di santonina, inalterabili alla luce. Però, se ad esse si addiziona un po' di alcali caustico, in capo ad alcuni minuti si nota una spiccata colorazione rosa-violacea per le soluzioni di santonina, una *fluorescenza* giallo-verdastra per quelle di diidrosantonina, ed una simile, una più rossastra, e più lenta ad apparire, per le ossisantonine. Queste ultime richiedono, in generale, l'addizione di etilato sodico quale alcali.

3. Queste varie colorazioni permangono, in generale, assai poco. Le prime soluzioni a scolorarsi sono quelle delle due ossisantonine isomere: quella N/50, in capo ad un quarto d'ora, torna ad esser incolora. Le soluzioni verdi di diidrosantonina resistono anche un'ora e più; quelle rosacee di santonina si scolorano molto lentamente, e, dopo due o tre ore, assumono una colorazione giallastra che si attenua dopo lungo tempo.

In tutti e tre i casi, l'azione della potassa caustica, e dell'etilato sodico, si ammette esser molto semplice e procedere in modo simile: si apre l'anello lattonico caratteristico della santonina, e si forma il santoninato alcalino corrispondente: e cioè:



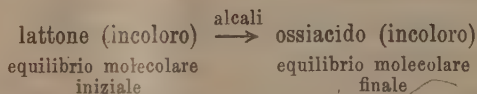
ossia, in istruttura,



Ora, questa reazione di idratazione semplicissima, in lattoni complessi come la santonina ed i suoi derivati, dà origine a prodotti intermedi co-

lorati; oppure, secondo le vedute moderne, le agitazioni molecolari, inevitabili durante la reazione, si rendono a noi visibili in questi tre casi con una marcatissima colorazione, provocata dunque dalla comparsa d'una banda d'assorbimento *molto simile*, e nella regione visibile dello spettro.

La comparsa e la scomparsa della colorazione ci dà quindi il modo di seguire l'inizio (e l'*induzione*), il procedere e il finire della trasformazione seguente:



4. L'esame del grafico che riporta le tre bande d'assorbimento caratteristiche della santonina, diidrosantonina e delle ossisantonine (ambedue

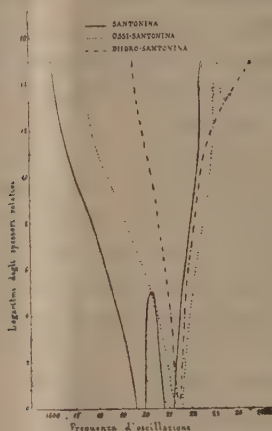


FIG. 1.

questi ultimi composti hanno identico comportamento spettrochimico) in soluzione alcalina, rivela che la reazione



sembra decorrere, salvo piccole differenze dovute alla varia natura della sostanza studiata, in modo molto simile per i tre composti presi in considerazione.

Infatti, si nota una banda molto persistente d'assorbimento che si estende, per la parte più importante, nella regione dello spettro visibile compresa fra 540 e 440 $\mu\mu$ di lunghezza d'onda. Un po' irregolare è la santonina, che presenta una doppia banda per diluizioni assai grandi.

Le curve d'assorbimento date le concentrazioni delle soluzioni adoperate, danno anche una idea della grande sensibilità della reazione fra la santonina o suoi derivati a anello lattonico chiuso e gli alcali caustici per scopo analitico. La reazione è sufficientemente rapida, nettissima e differenziale,

5. Le piccole variazioni nel decorso delle tre curve d'assorbimento dei tre tipi di sostanze studiate (santonina e derivati ossigenati o idrogenati), diventano assai notevoli se si osserva anche il comportamento spettrochimico nell'ultravioletto di detti composti, sempre in presenza di alcali caustico.

Si nota subito qui (nel secondo grafico riportato, e che dà una idea dell'andamento dell'assorbimento nell'ultravioletto estremo), che, mentre le curve della diidrosantonina e della ossisantonina sono molto simili per decorso, la curva della santonina è di tutt'altro tipo e presenta un brusco flesso in corrispondenza all'ordinata 7 (logaritmo dello spessore relativo) e all'ascissa 3900 (lunghezza d'onda: $256 \mu\mu$). Ma queste simiglianze e dissimiglianze si accentuano molto di più, se si pon mente al fatto che nella reazione studiata,

lattone \rightarrow ossiacido,

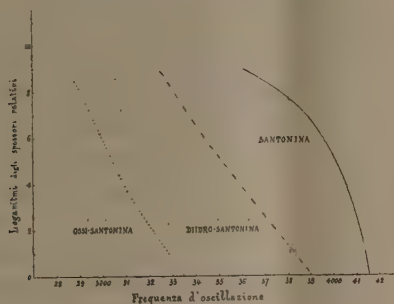


FIG. 2.

nel caso della diidrosantonina e della ossisantonina si manifesta una spiccata fluorescenza, il che non avviene nel caso della santonina. Ora, per il poco che si conosce sulle cause della comparsa della fluorescenza — e quel poco, mal si applica ancora alla precisa interpretazione di fenomeni intermolecolari in aggregati atomici così complessi come sarebbe un composto della serie idroaromatica —, siamo portati ad ammettere che la introduzione dei due atomi di idrogeno o di un atomo di ossigeno nella molecola della santonina porti con sè di conseguenza un cambiamento abbastanza profondo *almeno nei collegamenti* fra atomo e atomo della molecola della santonina stessa.

In generale, è anche risaputo che le sostanze le quali possiedono una fluorescenza sono piuttosto atte anche a reazioni vivaci; ciò sarebbe quindi in relazione colla molto maggior velocità di apertura dell'anello lattonico

che si nota nella diidro- e nella ossisantonina, e che di conseguenza conduce ad una molto più pronta decolorazione delle soluzioni alcaline di questi composti. Ed a questo proposito ricordo qui che la differente velocità di formazione delle ossime della diidrosantonina e della santonina ha servito appunto al Cusmano stesso (loc. cit.) per ottenere la separazione delle due sostanze, inquantochè la santonina è molto più lenta a combinarsi con la idrossilamina.

Mineralogia. — *Sulla vera natura della miersite e della cuproidargirite* ⁽¹⁾. Nota I di E. QUERCIGH, presentata dal Socio G. STRUEVER.

Com'è noto, la fase dell'ioduro d'argento stabile a temperatura ordinaria è l'esagonale, che si rinviene anche come minerale in natura (iodirite); a temperature superiori a circa 147°, questa si trasforma in un'altra fase, otticamente isotropa, poco ben conosciuta, poichè tuttora si ritiene da molti cubica e da altri liquida, senza ragioni assolutamente decisive. Nel 1898, L. J. Spencer descrisse sotto il nome di *miersite*, in onore del prof. H. A. Miers, un minerale nuovo, da lui rinvenuto in due campioni del British Museum, provenienti da Broken Hill [New South Wales (Australia)], che egli ritenne costituito da questa seconda fase dell'ioduro d'argento ⁽²⁾.

Si presentava in croste cristalline ed aggregati poco distinti, associata in un campione a calcosina, quarzo e granato, nell'altro a malachite, anglesite e wad. Alcuni piccoli cristalli furono da lui misurati e descritti: presentavano abito tetraedrico, con facce del cubo abbastanza sviluppate, sfaldatura perfetta secondo il rombododecaedro {110}, geminazione frequente secondo le facce del tetraedro, splendore adamantino, colore giallo pallido, scalfitura e polvere di colorito più intenso; al microscopio apparivano isotropi; l'analisi qualitativa mise in evidenza che una parte dell'argento era sostituita dal rame.

Due anni dopo, lo Spencer ⁽³⁾, avendo raccolto nuovo materiale, diede ulteriori dettagli sulla miersite. La rinvenne accompagnata anche da limonite, cerussite e da cuprite non ancora alterata; determinò ancora la sfaldatura, la durezza = 2,5; accertò la frattura concoide, l'inalterabilità alla luce solare, l'isotropia ottica delle lamelle di sfaldatura secondo il rombo-

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di mineralogia della R. Università di Torino, diretto dal prof. Ferruccio Zambonini.

⁽²⁾ L. J. Spencer, *Miersite a cubic modification of native silver iodide*. Nature, 57 (1898) 574.

⁽³⁾ L. J. Spencer, *Marshite, miersite and iodyrite from Broken Hill. N. S. W.*, Min. Mag., XIII, 59 (1901) 41.

dodecaedro, l'assenza di piroelettricità. Nei cristalli misurati predominavano le facce ($\bar{1}00$) ($0\bar{1}0$) e ($00\bar{1}$) del cubo e le (111) del tetraedro, che era pure piano di geminazione. L'analisi qualitativa svelò di nuovo, oltre all'argento ed all'iodio, il rame in quantità variabili nei vari individui, e tracce di cloro.

Alcuni cristalli, però, provenienti da due dei campioni, differivano notevolmente dagli altri, poichè, quantunque avessero l'abito tetraedrico, la durezza e la sfaldatura della miersite, si presentavano di color più pallido, ed al microscopio apparivano birifrangenti; contenevano solo tracce di rame, e furono considerati da Spencer come un intimo e regolare accrescimento di miersite e iodirite, reso più probabile dall'aver egli trovato cristalli di iodirite con abito tetraedrico composto di quattro romboedri geminati, con angoli vicinissimi a quelli del sistema cubico, tanto che al goniometro sarebbe stato impossibile il distinguerli dalla marshite e dalla miersite.

Riscaldando, sino a fusione completa, dei frammenti di vari cristalli, otticamente isotropi, di miersite, lo Spencer osservò che, nel raffreddamento, ad un certo punto compaiono, nella superficie omogenea di color giallo vivo, degli aghi giallo-pallidi che si estendono rapidamente, sicchè il campo risulta occupato da due sostanze otticamente isotrope, di colore diverso, separate nettamente fra loro. A temperatura più bassa, la sostanza giallo-viva si trasforma rapidamente in iodirite birifrangente. La quantità relativa delle due sostanze, che allora si presentano coesistenti, è variabile nei vari cristalli: in generale la iodirite è molto scarsa; alle volte manca completamente, salvo per il caso dei cristalli birifrangenti accennati, in cui la iodirite è quasi pura.

Ripetendo queste esperienze con miscele preparate artificialmente, di concentrazioni comprese fra $\text{AgI} + \text{CuI}$ e $8\text{AgI} + \text{CuI}$, egli, in seguito, osservò che la miscela $4\text{AgI} + \text{CuI}$, dopo raffreddata, si presentava quasi completamente isotropa con solo qualche punto birifrangente qua e là, mentre, per concentrazioni superiori in CuI , ogni traccia di sostanza birifrangente spariva, per riapparire su vasta scala alle concentrazioni più elevate in AgI . Perciò lo Spencer credette di poter concludere che la miersite fosse un composto chimicamente definito, della probabile formola $4\text{AgI} \cdot \text{CuI}$, capace di dare miscele isomorfe colla marshite, e soltanto semplici mescolanze colla iodirite.

Un anno dopo, G. T. Prior⁽¹⁾ analizzò quantitativamente alcuni cristalli di miersite che al microscopio apparivano esenti da impurità. La composizione trovata concorda benissimo colla formola $4\text{AgI} \cdot \text{CuI}$. Dall'insieme delle ricerche di Spencer e di Prior, la miersite, da allora in poi, fu considerata, senza alcuna riserva, come costituita da un composto chimico

(¹) G. T. Prior, *The identity of kilbrickenite with geocronite: and analyses of miersite, marshite and copper-pyrites*. Min. Mag., XIII, 605 (1902) 159.

definito; infatti, come tale è stato riportato dal Dana⁽¹⁾ ed accettato senza altro nei più importanti trattati, come quelli di Groth⁽²⁾ e di Hintze⁽³⁾.

Che le conclusioni di Spencer si debbano adottare senza discussione, non mi sembrò sostenibile, poichè il fatto che la miscela $4\text{AgI} \cdot \text{CuI}$, dopo fusa, cristallizzi in un tutto in massima parte isotropo, « with only a speck here and there of birifrangent iodyrite⁽⁴⁾ », non prova minimamente l'avvenuta formazione di un composto; ed è ovvio che l'analisi di Prior ci dice solo la composizione, non la costituzione del materiale esaminato, per quanto in esso sia semplice il rapporto stechiometrico fra i due ioduri, poichè è noto che molti minerali si presentano con rapporti anche più semplici fra i loro componenti, senza però essere dei composti, ma delle semplici soluzioni solide. Nè si comprende facilmente come Spencer ammetta un composto, dopo aver osservato che frammenti di cristalli isotropi di miersite davano, per raffreddamento dopo fusione, un prodotto costituito in generale da due sostanze, di cui una, per quanto in scarsa quantità, era la iodirite birifrangente.

Ammettendo, con Spencer, che il composto $4\text{AgI} \cdot \text{CuI}$ dia miscele isomorfe colla marshite e non colla iodirite, siccome i frammenti da lui esaminati, prima della fusione, erano isotropi, dovevano avere una concentrazione in AgI minore o, al massimo, eguale a quella espressa da $4\text{AgI} \cdot \text{CuI}$, e non si spiega come poi compaia la iodirite, la quale non dovrebbe rimanere libera, sia che le soluzioni solide, formatesi per le prime, avessero concentrazione in CuI superiore a quella della fase liquida coesistente in equilibrio, sia nel caso opposto; nè si può ammettere una parziale decomposizione del composto $4\text{AgI} \cdot \text{CuI}$, perchè certi frammenti si mostrarono, dopo fusione, completamente privi di iodirite.

Più logica (o per lo meno con ugual diritto di venire avanzata) sarebbe stata l'ipotesi dell'esistenza di soluzioni solide fra CuI ed AgI in rapporti limitati a temperatura ordinaria, tanto più che *a priori* non appare inverosimile che la fase regolare dell'ioduro rameoso, stabile a temperatura ordinaria, disciolga allo stato solido, e stabilizzi anche sotto ai 147° , la fase otticamente isotropa del AgI , che potrebbe pure essere cubica. Allora si comprenderebbe bene come la miersite a massima concentrazione in AgI , monorifrangente prima della fusione, diventasse birifrangente dopo, poichè durante il raffreddamento la formazione dei primi cristalli misti, molto ricchi in CuI e poco suscettibili di variare la propria concentrazione in accordo colla fase liquida coesistente, aumentando la concentrazione di AgI in questa ultima, farebbe subito ad essa sorpassare il limite di solubilità di AgI in CuI allo stato solido, determinando, nella solidificazione, la separazione di

(¹) E. S. Dana, I Appendix (1899) 47; II App. (1909), 69.

(²) P. Groth, Chem. Krystallographie, I (1906) 202.

(³) C. Hintze, Handb. d. Mineralogie, I (1912) 2321.

(⁴) Spencer, loc. cit., pag. 44.

AgI, che, giunto alla temperatura di trasformazione, diventa, com'è naturale, birifrangente.

Questa ipotesi non fu però avanzata, anzi fu esclusa da B. Gossner⁽¹⁾: « eine Molekularverbindung von AgI mit CuI mit konstanter Zusammensetzung und nicht eine isomorphe Mischung haben wir mit ziemlicher Sicherheit vor uns im Miersit »; e da Groth⁽²⁾: « scheinen auch keine eigentlichen isomorphen Mischungen von CuI und AgI zu existieren, vielmehr liefert die geschmolzene Mischung beider Salze beim Erstarren eine kubisch kristallisierende Verbindung von der Zusammensetzung $4\text{AgI} \cdot \text{CuI}$ und ein Ueberschuss an AgI scheidet sich getrennt aus, während ein solcher von CuI von den Kristallen der Verbindung aufgenommen wird ».

Se oltre a ciò si considera che le determinazioni di G. F. Rodwell⁽³⁾, dei coefficienti di dilatazione e dei punti di fusione di alcune miscele di AgI e CuI, non permettono in alcun modo di dedurre l'esistenza di un eventuale composto, si vede bene che il problema della costituzione della miersite, dopo più di 15 anni dalla sua scoperta, era ancora da risolvere. Questo io mi proposi di fare, e l'argomento mi sembrò interessante, anche perchè, più di 20 anni fa, fu descritto, molto sommariamente, da H. Schulze⁽⁴⁾ un minerale analogo, la *cuproiodargirite*, la cui natura (quantunque la composizione risulti, dall'analisi, corrispondere alla formola $\text{CuI} \cdot \text{AgI}$) ed il cui stesso diritto di esistere come specie minerale indipendente, sono assai discutibili, date le scarse notizie lasciateci da Schulze in proposito, notizie rimaste poi anche le uniche.

Per cercare di raggiungere il mio scopo, intrapresi principalmente quattro serie di esperienze:

- 1°) Analisi termica del sistema binario $\text{AgI} + \text{CuI}$.
- 2°) Esame delle sezioni sottili ottenute dai blocchi analizzati termicamente.
- 3°) Osservazione microscopica del processo di cristallizzazione, fino a temperatura ordinaria, delle varie miscele di AgI e CuI.
- 4°) Esperienze sulla sintesi delle miersiti.

1. Analisi termica del sistema binario $\text{AgI} + \text{CuI}$.

È certo che, per la natura stessa del giacimento di Broken Hill, va esclusa l'ipotesi che la miersite vi si sia formata per via ignea; ma è indiscutibile che lo studio delle relazioni d'affinità che esistono fra l'ioduro

⁽¹⁾ B. Gossner, *Untersuchungen polymorpher Körper*. Zeitschr. f. Kryst, XXXVIII (1904) 129.

⁽²⁾ P. Groth, loc. cit., pag. 174.

⁽³⁾ G. F. Rodwell, *On the effects of heat on certain haloid compounds of silver, mercury, lead and copper*. Phil. Trans., 173 (1882) 1125 e seg.

⁽⁴⁾ H. Schulze, *Chemiker Zeitung* (1892) XVI, 1952; E. S. Dana, I Appendix (1899).

d'argento e quello rameoso, quando si separano dalle loro miscele binarie fuse, avrebbe dovuto gettare buona luce sulla quistione discussa; ed a tale proposito nulla si sapeva finora, perchè, quantunque gli alogenuri degli elementi del I gruppo di Mendelejeff sieno stati largamente studiati da questo punto di vista, le ricerche fin qui eseguite riguardano più particolarmente i cloruri, e perchè, d'altra parte, le esperienze di Rodwell nulla rivelano, da sole, in proposito.

L'analisi termica venne eseguita adoperando i soliti termoelementi, platino-platinorodio, collegati a galvanometri di Siemens & Halske. Il peso delle miscele adoperate era costantemente di gr. 15, ed ebbi cura che le disposizioni adottate fossero tali da dare buon affidamento sia per ciò che riguarda la velocità di raffreddamento e la sensibilità alle variazioni termiche, sia per quanto concerne la protezione dall'ossidazione delle miscele.

Gli ioduri adoperati provenivano da Merk e Kahlbaum, e se si eccettua un po' d'umidità eliminata accuratamente prima d'intraprendere le esperienze, non contenevano impurezze svelabili coi comuni saggi analitici.

Il punto di solidificazione dell'ioduro d'argento si manifesta a 557°, con un arresto molto netto nella curva di raffreddamento.

Se si confronta questa cifra con quelle finora trovate dai vari sperimentatori che se ne occuparono:

T. Carnelley	530°	(J. Chem. soc., 29 (1876), 489).
”	527	(J. Chem. soc., 33 (1878), 273).
Rodwell	527	(loc. cit., pag. 1133).
Ramsay e Eumorfopoulos	556	(Phil. mag., 41 (1896), 360).
Steger	526	(Zeitschr. f. physik. Chemie, 43 (1903), 601).
Mönkemeyer	552	(N. Jahrbuch. Min. Beilbd., XXII (1906), 28).
Sandonnini	546	(Rend. Acc. Lincei, XXI, 2° (1911), 199).
Quercigh	557	

si vede subito che, mentre le determinazioni di Carnelley, di Rodwell e di Steger danno valori che, quantunque concordanti, appaiono con grande probabilità troppo bassi, le altre sembrano più attendibili. La temperatura trovata da Ramsay ed Eumorfopoulos (556°) è di solo 1° diversa dalla mia (557°): e siccome questi due valori sono i più alti finora trovati, si può ritenere che rappresentino la temperatura più approssimata a quella vera di solidificazione dell'ioduro di argento.

Che questo punto critico, che si manifesta a 557° con notevole tonalità termica, sia poi un vero punto di cristallizzazione della fase cubica dell'Ag I, od un *punto di chiarificazione*, è indifferente per lo scopo di queste ricerche.

L'ioduro rameoso, fuso in modo da proteggerlo dall'ossidazione, cristallizzò a 602°.

Esistono in proposito altri dati, che sarà bene confrontare:

T. Carnelley	601° ± 3°	(J. Chem. soc., 33 (1878), 273).
Carnelley e O' Shea	628	(J. Chem. soc., 45 (1884), 409).
Rodwell	601	(loc. cit.).
Mönkemeyer	590	(loc. cit.).
Quercigh	602	

Il valore di Mönkemeyer, che pure è uno dei più attendibili, non ha l'esattezza delle temperature inferiori da lui date, poichè il punto fisso più alto con cui egli graduò il suo termoelemento è quello dello zinco e da questa temperatura in poi egli dovette ricorrere all'estrapolazione che diminuisce, com'è ovvio, l'esattezza; quindi non è improbabile che anche questo valore, come quello dell'Ag I sia inferiore al reale, e più di quello, stante la temperatura più elevata. Il valore di Carnelley e O' Shea mi sembra troppo alto.

La temperatura di trasformazione della fase otticamente isotropa dello Ag I in quella birifrangente fu da me trovato termicamente a 147°; e su questo punto esiste una discreta concordanza fra i vari sperimentatori:

Wernicke	139°-138°,5	metodo ottico	(Pogg. Ann., 142 (1871) 560.
Rodwell	148°	" dilatometrico	(loc. cit., pag. 1133; vedasi diagramma tav. 96 stesso volume).
Kohlrausch	145°	" della conduttività	(Wiedm. Ann., N. F., 17 (1882), 642).
Mallard e Le Chatelier	146°	" ottico	(Compt. rendus, 97 (1883), 102. Bull. Soc. Min. Fr., 6 (1883), 182).
W. Schwarz	145°,4-146°,9	" ottico	(Beitr. z. Kenntnis d. unkehrb. Umwdlp. polym. Körper. Göttingen 1892). Zeitschrift für Kryst. 25 (1896) 613).
Steger	146°-147°	" termico	(Zeitschr. f. physik. Ch., 43, (1903), 601).
Mönkemeyer {	143°	" termico	{ (loc. cit.).
	146°,9-147°,2	" ottico	
Stoltzenberg e Huth .	134°	" ottico	(Zeitschr. f. physich. Ch., 71, (1910), 644).
Sandonnini	142°	" termico	(loc. cit.).
Quercigh	147°	" termico	

Sembra, da questo confronto, che il valore di 147° sia il più attendibile, come quello a cui tende il maggior numero di determinazioni, se si eccettua quella, antiquata, di Wernicke, e quella evidentemente errata di Stoltzenberg e Huth che trovarono inoltre la temperatura di fusione di Ag I a « circa 500° ».

La trasformazione della fase esagonale di Cu I in quella cubica stabile a basse temperature, fu trovata da me a 402°. Mönkemeyer ottenne (loc. cit., pag. 42) termicamente il valore di 400°, otticamente quello di 397°-399°; altri dati non esistono in proposito, perchè Rodwell dilatometricamente non potè osservare tale trasformazione.

I risultati delle esperienze termiche sono esposti nella seguente tabella e rappresentati graficamente nel diagramma della fig. 1.

Come si vede da quest'ultimo, tutte le miscele presentano nel raffreddarsi un primo rallentamento di durata variabile, i cui punti d'inizio e di fine si trovano su due curve $AcdB$ ed $AabB$, che hanno in comune i punti di fusione dei componenti puri e si avvicinano di molto a circa 50 % mol. di Cu I, concentrazione alla quale raggiungono anche un minimo di temperatura.

TABELLA I.

N.	% di Cu I		I equilibrio monovariante		II equilibrio monovariante		Equilibri invarianti	
	in peso	molecolari	inizio	fine	inizio	fine	temperatura	durata in m''
1	100 (0 Ag I)	100 (0 Ag I)	—	—	—	—	{ 602° 402	80 60
2	87.96	90	559°	548°	370°	354°	—	—
3	76.45	80	533	520	350	334	—	—
4	65.44	70	516	500	335	317	—	—
5	54.90	60	500	492	319	—	—	—
6	44.80	50	490	485	298	—	—	—
7	35.11	40	495	490	278	—	—	—
8	25.80	30	506	495	270	—	—	—
9	16.87	20	521	510	245	—	—	—
10	8.27	10	535	524	205	—	—	—
11	4.10	5	544	536	175	—	147	70
12	0 (100 Ag I)	0 (100 Ag I)	—	—	—	—	{ 557 147	60 130

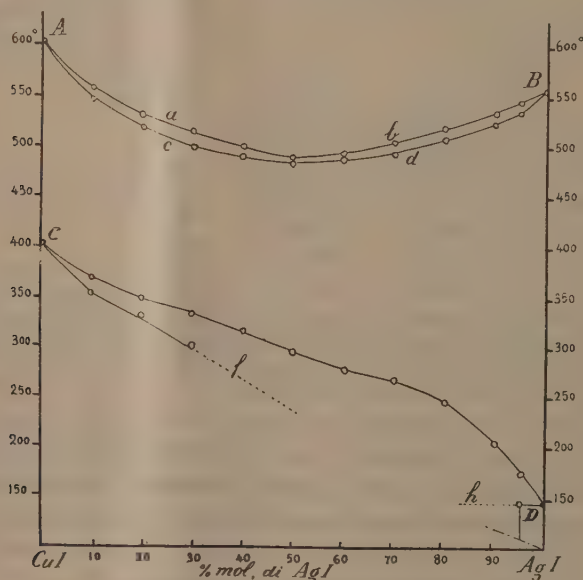


FIG. 1.

A temperature più basse, tutte le miscele presentano un nuovo rallentamento nella velocità di raffreddamento, che incomincia in corrispondenza ai punti della curva CD, e la cui fine si scorge bene termicamente solo per concentrazioni in Cu I superiori al 70 %.

La miscela 95 % Ag I presenta inoltre, a 147°, un arresto, che è più breve di quello di eguale quantità di Ag I puro; tale arresto non si può osservare con certezza termicamente, nelle condizioni d'esperienza, per concentrazioni inferiori in Ag I.

Il diagramma sarebbe dunque del tipo delle sostanze che formano soluzioni solide in tutti i rapporti ad elevata temperatura, soluzioni che poi, raffreddandosi subiscono una trasformazione; per forti concentrazioni di Ag I si osserva anche parziale smistamento con susseguente formazione della fase esagonale dello ioduro d'argento messo in libertà. Questo diagramma verrà ampiamente discusso, in base anche ad altre ricerche, in una prossima Nota. Osservo solo, per il momento, che, in base all'analisi termica eseguita, sembra priva di obiezioni l'esclusione della formazione del composto $4 \text{ Ag I} \cdot \text{Cu I}$ nelle condizioni d'esperienza, che sono simili a quelle in cui Spencer ammise che esso si formasse.

Fisiologia vegetale. — *Ricerche sull'azione di nitrati isolati sul periodo germinativo dell'Avena sativa.* IV Nota preventiva del dott. F. PLATE, presentata dal Socio R. PIROTTA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Biologia. — *Ulteriori osservazioni sulle relazioni degli organi e sulla nutrizione con tiroide di Mammiferi nell'accrescimento larvale e nella metamorfosi degli Anfibî Anuri* ⁽¹⁾. Nota II del dott. GIULIO COTRONEI, presentata dal Socio B. GRASSI.

L'influenza delle ghiandole a secrezione interna dei Mammiferi sulle larve degli Anfibî, ha richiamato recentemente lo studio di molti osservatori.

Gudernatsch ⁽²⁾ ha per il primo (1912), con ricerche assai interessanti, osservato che la tiroide dei Mammiferi, somministrata a larve di *Rana*, sotto forma di cibo, accelerava la fase di metamorfosi e la differenziazione dello animale: la tiroide produceva inoltre un arresto dell'accrescimento delle larve. Opposta era l'influenza del timo: favoriva l'accrescimento larvale, ma posponeva o sopprimeva la metamorfosi.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto d'anatomia e fisiologia comparata della R. Università di Roma.

⁽²⁾ Gudernatsch, I. F., *Feeding experiments on Tadpoles. I. The influence of specific organs given as food on growth and differentiation.* Arch. f. Entwicklungsmechanik. vol. XXXV, pp. 457-483, 1912.

Io (Cotronei, 1913) ⁽¹⁾ mi son servito della somministrazione di tiroide allo scopo di studiare le correlazioni organiche, squilibrando le secrezioni interne, nell'accrescimento larvale e nella metamorfosi degli Anfibî Anuri. Ho notato che la tiroide, somministrata come unico nutrimento, tendeva a produrre fenomeni letali; la morte sopraggiungeva dopo un tempo vario; per lo più, se le larve, al momento in cui s'iniziavano gli esperimenti, erano abbastanza sviluppate, la morte sopravveniva quando erano in fase di metamorfosi; ma la metamorfosi non si compiva: ho però notato che questo non era da confondersi con i fenomeni descritti da Gudernatsch per il timo. Ho dimostrato, con osservazioni macroscopiche e istologiche, che l'influenza della tiroide dei Mammiferi, somministrata intensamente alle larve degli Anfibî Anuri, si può considerare come influenza disarmonica, oltre che acceleratrice; perchè l'animale inizia la fase di metamorfosi con lo stato di sviluppo disarmonico di diversi organi.

Brachet (1913) ⁽²⁾ si è limitato a comunicare poche parole di conferma ai risultati di Gudernatsch.

Romeis (1913) ⁽³⁾ ha studiato il comportamento della rigenerazione di larve di *Rane*, nutrite con differenti organi a secrezione interna.

Babak (1913) ⁽⁴⁾ ricorda, a proposito delle ricerche di Gudernatsch, le sue osservazioni sull'influenza del sistema nervoso ⁽⁵⁾, nei processi morfogenetici della metamorfosi; ed annunzia che un suo allievo ha ottenuto l'inizio della metamorfosi in larve di *Amblystoma*, dopo una settimana di nutrizione con tiroide.

Gudernatsch (1914) ⁽⁶⁾, con un nuovo lavoro pubblicato in questi ultimi giorni, considera molte diete miste: dove la tiroide è mista, con altro nutrimento, esercita un'azione acceleratrice sullo sviluppo. Il timo è quello che più contrasta l'influenza della tiroide. Gudernatsch ammette, però, che la maggior parte delle larve nutrite soltanto con tiroide di Mammiferi muore subito dopo l'apparizione degli arti anteriori e la simultanea riduzione della

⁽¹⁾ Cotronei G., *Primo contributo sperimentale allo studio delle relazioni degli organi nell'accrescimento e nella metamorfosi dagli Anfibî Anuri. L'influenza della nutrizione con tiroide di Mammiferi*. Bios, vol. II, fasc. I, settembre 1913.

⁽²⁾ Brachet A., *Présentation de têtards soumis à des conditions de nutrition spéciales*. Ann. et Bull. Soc. Roy. d. Sc. Med. et Nat. de Bruxelles, an. 71, fasc. 4^o, pagina 104.

⁽³⁾ Romeis B., *Der Einfluss verschiedenartiger Ernährung auf die Regeneration bei Kaulquappen*. Arch. f. Entw. Mech., Bd. 137, an. 1913.

⁽⁴⁾ Babak E., *Einige Gedanken über die Beziehung der Metamorphose bei den Amphibien zur inneren Sekretion*. Zentralbl. f. Physiol., Bd. XXVII, n. 10, an. 1913.

⁽⁵⁾ *Ueber die Beziehung des centralen Nervensystem zu den Gestaltvorgängen der Metamorphose des Frosches*, Phluger, Arch. Bd. CIX, 1905.

⁽⁶⁾ Gudernatsch. I. F., *Feeding experiments on tadpoles. II. A further contribution to the knowledge of organs with internal secretion*. The American Journ. of anat., vol. 15, n. 4, January 14, 1914, pag. 431.

loro coda (1914, pag. 469). Se la tiroide viene somministrata a lunghi intervalli, gli animali possono essere tenuti vivi per parecchie settimane, però aggiunge: « They will not undergo, however any further changes; except perhaps a continued reduction of their tails, nor will they ever fed again ». Gudernatsch cita alcuni casi nei quali (esperimenti del 1911) afferma di avere ottenuto completo riassorbimento della coda e sopravvivenza da 2 a 4 giorni. In esperimenti del 1912 (che riporta in questo lavoro), alcune larve di *Bufo* riuscirono a riassorbire quasi completamente la coda dietro il trattamento di nutrizione con tiroide; ma non sopravvissero. Importante è questa concordanza di Gudernatsch con i miei risultati: « A recovery from the thyroid influence is extremely rare ». Difatti, soltanto 5 esemplari di un esperimento di parecchie centinaia, e 6 in un altro, riuscirono a sopravvivere.

L'autore conclude che ritiene accertato che la tiroide contiene un principio che stimola la differenziazione, mentre il timo (e la milza) agisce in modo opposto, favorendo l'accrescimento larvale.

Nel mio lavoro del 1913 ho descritto come la nutrizione con tiroide, pur rappresentando una causa acceleratrice, tendeva a culminare, nei casi da me ottenuti, con il fenomeno della morte: ho osservato che la morte sopraggiungeva più rapida, allorché, con la emissione d'un solo arto, la coda era notevolmente ridotta. Nei casi, però, nei quali io ho ottenuto una sopravvivenza di moltissimi giorni dall'inizio dei fenomeni di metamorfosi, gli esemplari in esame avevano conservato per tutto il tempo la coda, in gran parte non riassorbita.

Là dove nei miei esperimenti ho ottenuto una più lunga sopravvivenza, bisogna distinguere due risultati:

1°) L'arto anteriore sinistro è stato emesso; ma non è stato emesso l'arto anteriore destro. (Cotronei, 1913, Esperimento VIII, pp. 31 e 32). La più lunga vitalità è stata ottenuta in una larva di *Rana esculenta*, nutrita dapprima con tuorlo d'uovo di gallina: la nutrizione con tiroide s'inizia il 26 giugno; il 6 luglio l'animale emette l'arto anteriore sinistro: muore il 26 luglio, senza emettere l'arto anteriore destro. L'animale ha preso un aspetto raniforme; ma la coda, dopo 20 giorni dall'emissione dell'arto, è ancora lunga mm. 11 ⁽¹⁾, mentre la lunghezza rostro-ale misura mm. 9. L'arto anteriore e gli arti posteriori sono notevolmente sviluppati: la coda, per quanto ancora così lunga, non presenta i caratteri larvali: il lembo ventrale si trova appena accennato soltanto verso la parte posteriore: un pò più il lembo dorsale: il diametro trasversale è piccolissimo.

2°) Gli arti anteriori sono stati emessi entrambi.

(¹) Le misurazioni di questa larva come di quella seguente si riferiscono a esemplari conservati in alcool a 70°.

Il caso migliore si riferisce ad un esemplare di *Rana esculenta*, che ha emesso l'arto anteriore sinistro (Esperimento X, pag. 32) tra il 10 luglio e l'11 luglio; l'arto anteriore destro viene emesso il 14 luglio. L'animale muore il 4 agosto: è dunque sopravvissuto 25 giorni dall'emissione del 1° arto; considerando il tempo trascorso, la coda si mantiene ancora lunga, giacchè misura mm. 13,5 (mentre la lunghezza rostro-ale è di mm. 10).

Per la descrizione dei caratteri della coda valgono le osservazioni precedenti.

Il tubo digerente, nei due esemplari riferiti, si mostrava molto differenziato. Lo stomaco è nettamente distinto e rigonfiato, mentre l'intestino si presenta ridotto e con diametro assai ristretto.

Anche in un esemplare di *Bufo vulgaris* (Esperimento 9, pag. 32) trovo che l'animale è morto il 24 luglio, mentre l'arto anteriore sinistro è stato emesso l'8 luglio: pure in questo caso la coda è notevolmente lunga.

I casi ricordati dimostrano che anche là dove la metamorfosi è stata rapidamente accelerata, la coda mostra tendenza a conservarsi, e in molti casi funzionante, per il tempo della sopravvivenza al regime sperimentato (osservare il diario dei miei esperimenti del 1913); ma ho già notato come Gudernatsch abbia descritto d'aver ottenuto, con gli esemplari nei quali si emettevano gli arti anteriori, contemporanea riduzione della coda; ed io stesso ho descritto (in un unico esperimento, però, 1913; Esperimento VII, pag. 31), una notevole riduzione della coda quando era emesso un arto, e, qualche volta, ancora prima dell'emissione dell'arto: in questi casi, però, le larve non potevano servirsi del residuo della coda per il movimento, e nei miei esperimenti io non ho mai ottenuto sopravvivenza.

Bisogna osservare che i fenomeni di riduzione sono anche in relazione con la perdita d'acqua: e poichè la struttura istologica era abbastanza ben conservata, almeno in una notevole parte della coda residuale, dobbiamo pensare che la maggiore riduzione della coda era in relazione con il grande addensamento dei tessuti (notevole perdita d'acqua).

Prima di chiudere queste brevi osservazioni, ricorderò che in qualche esemplare di *Bufo* m'è avvenuto di ottenere una riduzione quasi completa. Si trattava di esperimenti preliminari, nei quali era stata poi smessa la nutrizione con tiroide.

Ho voluto, nel proseguire le mie ricerche, osservare dopo quanto tempo si lasciavano scorgere gli effetti morfologici di una nutrizione con tiroide (Gudernatsch, nel 2° lavoro dice che, dopo 24 ore, si può scorgere qualche effetto; ma non riferisce osservazioni in proposito); è da notarsi che anche in questo genere di ricerche i risultati che si ottengono bisogna considerarli in relazione con lo stadio e il grado d'accrescimento degli esemplari sperimentati.

Una larva di *Rana esculenta* di circa 30 mm. di lunghezza totale, che presenta l'abbozzo degli arti posteriori, viene esaminata dopo circa 3 giorni di esperimento. Il tubo digerente, macroscopicamente, già mostra di essersi notevolmente ridotto: lo stomaco però non è rotato a sinistra: il diametro dei giri della spirale intestinale si è molto ristretto: macroscopicamente, la coda mostra un maggiore addensamento. Gli arti anteriori non sono stati emessi. All'esame istologico si nota che le fibre muscolari in una gran parte dell'intestino si sono addensate: i fenomeni degenerativi dell'epitelio larvale sono iniziati; vi sono tuttavia delle parti dell'intestino in cui la struttura larvale appare integra. L'esame istologico della coda non mostra tessuti in degenerazione. Gli arti posteriori si trovano allo stato di tessuto primitivo indifferenziato: si nota solo un orientamento di cellule in strato superficiale: si scorge qualche vaso sanguigno: non esistono altre differenziazioni istologiche. Ad una condizione abbastanza inoltrata nelle modificazioni del tubo digerente, non corrisponde affatto lo stato di sviluppo degli arti.

In larve meno sviluppate, alle quali ho somministrato tiroide di mammiferi per un periodo di tempo più lungo, noto ancora che gli arti sono assai poco sviluppati, formati soltanto di tessuto primitivo indifferenziato, quando sono avanzate le modificazioni del tubo digerente.

Questi risultati confermano che le disarmonie di sviluppo si manifestano presto, con l'influenza della tiroide, prima ancora che sia inoltrata la fase di metamorfosi. I miei risultati del 1913 si riferivano a esemplari che già avevano emesso un arto anteriore.

Fisiologia. — Ricerche sulla secrezione spermatica. Prime osservazioni sulla secrezione spermatica normale del cane ⁽¹⁾.
Nota II del dott. G. AMANTEA (assistente), presentata dal Socio L. LUCIANI.

Riferirò qui brevemente le prime osservazioni generali, che finora ho potuto eseguire, servendomi del metodo descritto nella Nota precedente, sulla secrezione spermatica normale del cane.

Debbo premettere che, dopo essermi assicurato che veramente nel cane l'eiaculazione dura tutto il periodo del coito, (ciò che ha servito di base per la costruzione della *vagina artificiale*, e ciò che ho facilmente potuto constatare, stimolando in modo adeguato la zona riflessogena peniena per gli atti sessuali, e quindi imitando le condizioni del coito normale, tenendo tra il pollice e l'indice, lubrificati con vasellina e applicati sulla regione retrobulbare, il pene dell'animale), sono ricorso allo stesso metodo semplice per stabilire se spermatozoi siano presenti in qualsiasi porzione del liquido spermatico eliminato durante una intera eiaculazione. Raccogliendo lo sperma

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel Laboratorio di fisiologia della R. Università di Roma, diretto dal prof. L. Luciani.

in modo frazionato, ho potuto così accertare che nell'eiaculazione del cane è possibile distinguere tre periodi: nel *primo periodo*, coincidente coi movimenti di coito (movimenti di va e vieni del treno posteriore, amplesso) e col vero orgasmo, lo sperma eliminato è lattescente e ricchissimo di spermatozoi; nel *secondo*, che incomincia dal momento in cui il cane fa l'atto di scavalcare, e si confonde senza limiti netti col successivo, lo sperma diviene sempre più povero di spermatozoi; nel *terzo* infine, il liquido eliminato, limpidissimo, è affatto privo di spermatozoi. La prima porzione di sperma, se il cane su cui si sperimenta si trovava da molto tempo in completo riposo sessuale, può anche contenere numerosi cristalli.

Nelle ricerche istituite col metodo della vagina artificiale, ho finora tenuto conto della *durata del coito fittizio*, della *quantità di sperma* raccolto, e del *numero degli spermatozoi* in esso contenuti. La durata del coito è stata misurata dal tempo trascorso dall'introduzione del pene del cane nell'apparecchio, fino al distacco spontaneo dell'animale da quest'ultimo. Lo sperma raccolto nel sacchetto interno e a pareti sottili dell'apparecchio, si è misurato versandolo con cura, e nel modo più completo possibile, in un piccolo cilindro graduato in decimi di cc. e fornito di tappo a smeriglio. Ho calcolato in media, che, la quantità di liquido che rimane aderente alla superficie interna del sacchetto è uguale a cc. 0,2; perciò al liquido versato nel cilindro ho sempre aggiunto, nel valutarne il volume, come costante, cc. 0,2. La numerazione degli spermatozoi ho potuto poi eseguire in modo assai semplice, ricorrendo al noto apparecchio di *Thoma-Zeiss*. Volendo però fare la conta subito dopo raccolto lo sperma, una difficoltà si presenta, e consiste nella mobilità di cui gli spermatozoi sono dotati. Ho ovviato a tale inconveniente diluendo nel mescolatore, invece che con le soluzioni consigliate nel caso degli eritrociti, con una soluzione di bisolfato di chinina all'1 %, che istantaneamente uccide gli spermatozoi senza alterarli. Si può anche però aspettare che gli spermatozoi perdano i loro movimenti, (ciò che avviene di solito quasi sempre dopo tre ore circa a temperatura dell'ambiente), e quindi procedere alla numerazione nello stesso modo come si pratica per gli eritrociti. Prima di prendere il campione di sperma, è sempre conveniente di agitare bene il liquido, nello stesso cilindro graduato, capovolgendolo più volte, dopo averlo chiuso col tappo. La diluizione consigliabile per la numerazione è quella di 1:10 - 1:20. Nelle mie ricerche ho sempre assunto come risultato definitivo per ciascuna numerazione la media di non meno di tre conte successive, sempre eseguite con campioni differenti di sperma, e contando gli spermatozoi distribuiti su almeno 200 quadratini dell'apparecchio di *Thoma-Zeiss*.

Finora ho così potuto sperimentare su più di 30 cani, di varia taglia e di varia razza, e tutti in perfetta maturità sessuale; non mi è stato però finora possibile di tenere esatto conto dell'età dei singoli animali.

Prima di istituire altre ricerche ho inteso il bisogno di bene orientarmi di fronte alla secrezione spermatica normale dell'animale, da me prescelto per lo studio. E qui appunto, come già ho detto, riferirò le prime osservazioni sulla durata del coito fittizio, sulla quantità di sperma e sul numero degli spermatozoi nel cane, in condizioni affatto normali.

La durata del coito fittizio non è la stessa in tutti i cani; ma, per uno stesso animale, normalmente si mantiene sempre costante entro certi limiti, che non vengono mai oltrepassati. Un cane, per es., pel quale la durata del coito fittizio oscilla normalmente fra 8' e 12', non la presenterà normalmente mai di 5' a 6' o di 15'-20'. Tenendo conto di più ejaculazioni successive, provocate intercalando tra l'una e l'altra sufficienti periodi di riposo (almeno 3-4 giorni), si può ritenere che in una discreta maggioranza di cani la durata del coito fittizio oscilla fra 7'-15'; in un altro buon numero di cani oscilla fra 15' e 18', come risulta dalla tabella I. Difficilmente si osserva una durata inferiore ai 7', mentre è più facile osservarla superiore ai 18'. Comunque, posso affermare che durate troppo brevi (1'-5') o troppo lunghe (25'-30') non sono più da considerare come normali. Se si eseguono raccolte successive di sperma molto ravvicinate tra loro, si nota che la durata dell'ejaculazione in un primo periodo diviene sempre più lunga, mentre, quando incomincia la stanchezza dell'animale, diviene eccessivamente breve.

TABELLA I.

CANE	Peso in kgr.	Durata del coito fittizio in minuti primi	Quantità dello sperma in cc.	Numero degli spermatozoi eliminati
I	4,600	10	1,7	109.480.000
II	4,800	7	2,6	38.740.000
III	5,500	10	4,3	44.290.000
IV	6,400	16	16,0	164.800.000
V	6,700	15	2,7	130.680.000
VI	7,000	8	4,2	151.620.000
VII	7,200	15	13,3	163.590.000
VIII	7,800	11	6,3	211.680.000
IX	8,000	15	6,0	348.000.000
X	8,600	14	7,1	188.860.000
XI	9,000	9	6,8	208.080.000
XII	9,600	12	7,5	248.000.000
XIII	9,900	11	5,0	110.000.000
XIV	10,000	10	6,5	280.800.000
XV	11,100	18	16,5	199.650.000
XVI	11,100	11	5,7	548.340.000
XVII	18,000	8	7,4	109.520.000
XVIII	20,000	8	7,7	93.170.000
XIX	20,100	12	19,1	679.960.000
XX	20,300	9	8,8	364.320.000

Esempio della durata del coito fittizio, della quantità di sperma e del numero degli spermatozoi in 18 cani normali, dopo un lungo periodo di riposo sessuale.

La quantità di sperma è anch'essa normalmente costante, entro certi limiti, per ogni cane. Se lo sperma si raccoglie per più volte, ma senza intercalare tra una raccolta e l'altra un sufficiente periodo di riposo, (se si raccoglie, per es., una volta al giorno), la sua quantità è massima il primo giorno, e decresce nei successivi. Per raccolte cioè non distanziate sufficientemente, la più grande quantità di sperma corrisponde alla prima. Fra la quantità di sperma e le dimensioni dell'animale, esiste un certo rapporto, nel senso che eliminano più sperma i cani di taglia maggiore; ma esso non è assoluto. Basta, a dimostrarlo, il fatto che la maggior quantità di sperma l'ho ottenuta, alle volte, da cani di media taglia. (Vedi tabella I). Sperimentando su animali normali e in riposo sessuale, e riferendomi alla prima raccolta eseguita su ciascuno, ho finora trovato come quantità minima cc. 1,7, e come quantità massima cc. 19,1, indipendentemente dalla taglia.

In quanto poi al numero complessivo degli spermatozoi di ogni ejaculazione, esso non è in rapporto nè con la durata del coito, nè con la quantità di sperma eliminata, nè con le dimensioni dell'animale. Probabilmente però esiste un rapporto con l'età, di cui però finora non mi è stato possibile tenere esatto conto. Riferendomi sempre alla prima raccolta di sperma eseguita su cani in riposo sessuale, posso dire di aver rilevato che il numero complessivo degli spermatozoi oscilla fra 38,740,000 e 679,960,000 per un'ejaculazione (vedi tabella I).

Varî fattori (stimoli periferici, eccitamenti psichici, stato di nutrizione dell'animale ecc.) possono influenzare la durata del coito fittizio; questi stessi fattori, e molti altri ancora, direttamente o indirettamente, in senso positivo o in senso negativo, possono influire sulla complessiva quantità del liquido spermatico eliminato; numerosi fattori infine possono anche far variare la produzione e l'eliminazione degli spermatozoi; ma di essi mi occuperò in seguito.

Prima di terminare, voglio qui solo accennare ad un fatto, che, sebbene mi sembri già bene osservato, spero di poter mettere più chiaramente in rilievo in un'altra Nota. Esso consiste in questo: se si raccoglie lo sperma da un cane normale dopo un lungo e sicuro periodo di riposo sessuale, e poi si fa una seconda raccolta con un intervallo di tempo opportuno (da 2 a 3 giorni, fino a 10-12), si può nella seconda raccolta ottenere un numero di spermatozoi di molto superiore a quello della prima. Evidentemente la prima ejaculazione ha esercitato un'azione eccitante (trofica) sulla secrezione testicolare (vedi tabella II).

TABELLA II.

CANE	Data della raccolta	Numero degli spermatozoi eliminati
I	15 novembre 1913	208.080.000
	21 " 1913	572.400.000
II	18 novembre 1913	93.170.000
	20 " 1913	825.500.000
III	10 novembre 1913	44.400.000
	22 " 1913	189.200.000
IV	3 gennaio 1914	211.680.000
	15 " 1914	450.210.000
V	18 gennaio 1914	110.000.000
	21 " 1914	263.320.000

Esempio del modo come può aumentare il numero degli spermatozoi quando si eseguono due raccolte successive di sperma, con un intervallo di 2 a 12 giorni tra la prima e la seconda.

CORRISPONDENZA

Il Presidente BLASERNA presenta un piego suggellato, inviato dal signor A. TRICCA, perchè sia conservato negli Archivi Accademici.

E. M.

